

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **55 (2009)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CASE 3: $X = \rho(0, 0, \mathbf{c})$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$. The proof for this case is very similar to the previous case. Just interchange $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$, and $\mathbf{b}$ and $\mathbf{c}$.

This completes the proof of invariance, and hence the proof of the proposition.

C.4 RELATION WITH OCTONIONS

Recall the basis e_i, f_i, U of Section 6 for V (imaginary split octonions) with its consequent multiplication table. Make the change of basis $e_i \mapsto -e_i$, keeping f_i, U as they were, thus changing the signs of some entries of the multiplication table. Use this new basis $E_i = -e_i, f_i, U$ to identify V with $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ by setting $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = \sum x_i E_i + \sum y_i f_i + zU \in V$. Referring to the multiplication table we compute

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)(\mathbf{x}', \mathbf{y}', z') = (-\mathbf{y} \times \mathbf{y}' - z\mathbf{x}' + z'\mathbf{x}, \\ \mathbf{x} \times \mathbf{x}' + z\mathbf{y}' - z'\mathbf{y}, \frac{1}{2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}' - \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y})) + 1\{zz' + \frac{1}{2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}' - \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y})\}.$$

The last term is in the real part of the split octonions, and not in V . It follows from this formula that $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)^2 = J$, of Cartan's claim (2) stated above. Multiplying out $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}, dz)$ we find that

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}, dz) = (\alpha, \beta, \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)) + 1\{\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)\},$$

where $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ are as in Cartan's claim (4). It follows that any element of $G_2 = \text{Aut}(\mathbf{O})$ preserves J and preserves the Pfaffian system of Cartan's claim (4). The distribution D defined by this system is, upon restriction to the null cone $\{J = 0\} \setminus \{0\}$, precisely the distribution D which we defined in the final section of our paper: $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) := \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c) = 0\}$. It follows that Cartan's construction, pushed down to the space of rays using the $\mathbf{R}^+$ -action, yields precisely our $\tilde{Q}$.

REFERENCES

- [1] AGRACHEV, A. A. Rolling balls and octonions. *Proc. Steklov Inst. Math.* 258 (2007), 13–22.
- [2] BRYANT, R. L. and L. HSU. Rigidity of integral curves of rank 2 distributions. *Invent. Math.* 114 (1993), 435–461.
- [3] BRYANT, R. L. Élie Cartan and Geometric Duality. Lecture notes from a lecture given at the Institut Élie Cartan on 19 June 1998; available on Bryant's website.

- [4] CARTAN, É. Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* 27 (1910), 109–192. (Reprinted in *Œuvres complètes*, Partie II, 927–1010.)
- [5] — Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse, Paris, Nony, 1894. (Reprinted in *Œuvres complètes*, Partie I, vol. 1.)
- [6] — Les groupes réels simples, finis et continus. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* 31 (1914), 263–355. (Reprinted in *Œuvres complètes*, Partie I, vol. 1.)
- [7] CHERN, S. S. and C. CHEVALLEY. Élie Cartan and his mathematical work. *Bull. Amer. Math. Soc.* 58 (1952), 217–250. (Reprinted in *Œuvres complètes*, Partie III, vol. 2.)
- [8] HAMMERSLEY, J. M. Oxford commemoration ball. In: *Probability, Statistics and Analysis*, 112–142. London Math. Soc. Lecture Note Series 79. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.
- [9] HARVEY, F. R. *Spinors and Calibrations*. Perspectives in Mathematics 9. Academic Press, Inc., Boston, 1990.
- [10] JOHNSON, B. D. The nonholonomy of the rolling sphere. *Amer. Math. Monthly* 114 (2007), 500–508.
- [11] KAPLAN, A. and F. LEVSTEIN. A split Fano plane. In preparation.
- [12] MONTGOMERY, R. *A Tour of Sub-Riemannian Geometry*. Amer. Math. Soc., 2001.
- [13] SERRE, J.-P. *Complex Semisimple Lie Algebras*. Translated from the French by G. A. Jones. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [14] TANAKA, N. On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups. *J. Math. Kyoto Univ.* 10 (1970), 1–82.
- [15] — On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras. *Hokkaido Math. J.* 8 (1979), 23–84.
- [16] VOGAN, D. A., JR. The unitary dual of G_2 . *Invent. Math.* 116 (1994), 677–791 (esp. p. 679).
- [17] YAMAGUCHI, K. Differential systems associated with simple graded Lie algebras. In: *Progress in Differential Geometry*, 413–494. Advanced Studies in Pure Mathematics 22. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1993.

(Reçu le 19 décembre 2006; version révisée reçue le 21 juin 2008)

Gil Bor

CIMAT
Guanajuato, Gto
Mexico
e-mail: gil@cimat.mx

Richard Montgomery

Mathematics Department
UC Santa Cruz
Santa Cruz, CA 95064
U. S. A.
e-mail: rmont@math.ucsc.edu