

The uniform Kazhdan property for $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$

Autor(en): **Arzhantseva, Goulmira N.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **54 (2008)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **06.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-109872>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3

THE UNIFORM KAZHDAN PROPERTY FOR $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, $n \geq 3$

by Goul'nara N. ARZHANTSEVA

Let Γ be a discrete group, and let S be a finite subset of Γ . For a unitary representation π of Γ in a separable Hilbert space $\mathcal{H}$ we define the number

$$K(\pi, \Gamma, S) = \inf_{0 \neq u \in \mathcal{H}} \max_{s \in S} \frac{\|\pi(s)u - u\|}{\|u\|}.$$

Then the *Kazhdan constant* of Γ with respect to S is defined as

$$K(\Gamma, S) = \inf_{\pi} K(\pi, \Gamma, S),$$

where the infimum is taken over unitary representations π having no invariant vectors. We also define the *uniform Kazhdan constant* of Γ as

$$K(\Gamma) = \inf_S K(\Gamma, S),$$

where the infimum is taken over all finite generating sets S of Γ .

A group Γ is said to have *Kazhdan property (T)* (or to be a *Kazhdan group*) if there exists a finite subset S of Γ with $K(\Gamma, S) > 0$. A group Γ is *uniform Kazhdan* if $K(\Gamma) > 0$.

Shortly after its introduction by David Kazhdan in the mid 60's, property (T) was used by Gregory Margulis to give a first explicit construction of infinite families of expander graphs of bounded degree. In particular, a major problem of practical application in the design of efficient communication networks was solved.

A classical example of a Kazhdan group is the group $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ for $n \geq 3$ (for more details and a general context of locally compact groups see the recent book [2]). Surprisingly, the following question is still open.

QUESTION 3.1. *Is the group $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, for $n \geq 3$, uniform Kazhdan?*

Infinite finitely generated uniform Kazhdan groups were discovered very recently, see [6] or [1]. However, these groups are neither finitely presented nor residually finite. The latter construction provides an infinite uniform Kazhdan group that weakly (see [4]) contains an infinite family of expanders in its Cayley graph.

An affirmative answer to the above question would give, in particular, the first example of a residually finite (and, in addition, finitely presented) infinite uniform Kazhdan group. It is crucial for applications: infinite families of expanders could be constructed independently of the choice of the group generating set.

A negative answer would be interesting as well. In that case, this classical group would belong to the class of non-uniform Kazhdan groups. First examples of such groups were obtained using Lie groups (see [3]). Then, all word hyperbolic groups were also shown to have zero uniform Kazhdan constant (see [5]).

REFERENCES

- [1] ARZHANTSEVA, G. and T. DELZANT. A random group with uniform Kazhdan property. *Preliminary version*.
- [2] BEKKA, B., P. DE LA HARPE and A. VALETTE. Kazhdan's Property (T). *New Mathematical Monographs II*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [3] GELANDER, T. and A. ZUK. Dependence of Kazhdan constants on generating subsets. *Israel J. Math.* 129 (2002), 93–98.
- [4] GROMOV, M. Random walk in random groups. *Geom. Funct. Anal.* 13 (2003), 73–146.
- [5] OSIN, D. Kazhdan constants of hyperbolic groups. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 36 (2002), 46–54; translation in *Funct. Anal. Appl.* 36 (2002), 290–297.
- [6] OSIN, D. and D. SONKIN. Uniform Kazhdan groups. Preprint arXiv: math.GR/0606012 (2006).

Goul'nara N. Arzhantseva

Département de Mathématiques
 Université de Genève
 2-4, rue du Lièvre
 CH-1211 Genève 4
 Switzerland
e-mail: goul'nara.arzhantseva@math.unige.ch