

## 3.4 The Cherednik algebra

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### 3.4 THE CHEREDNIK ALGEBRA

Let us now return to the algebra  $\mathcal{A}$  of operators on  $U$  generated by  $\mathcal{D}(U)$  and  $W$ . This algebra contains the Dunkl operators

$$D_y := \partial_y + \sum_{s \in \Sigma} c_s \frac{(\alpha_s, y)}{\alpha_s} (s - 1).$$

LEMMA 3.10. *The following relations hold:*

$$\begin{aligned} [x_i, x_j] &= [D_{x_i}, D_{x_j}] = 0, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n \\ [D_{x_i}, x_j] &= \delta_{ij} + \sum_{s \in \Sigma} c_s \frac{(x_i, \alpha_s)(x_j, \alpha_s)}{(\alpha_s, \alpha_s)} s, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n \end{aligned}$$

$$wxw^{-1} = w(x), \quad wD_yw^{-1} = D_{w(y)}, \quad \forall w \in W, x \in \mathfrak{h}^*, y \in \mathfrak{h}.$$

*Proof.* The proof is an easy computation, except for the relations  $[D_{x_i}, D_{x_j}] = 0$ , which follow from Theorem 2.6.  $\square$

This lemma motivates the following definition.

DEFINITION 3.11 (see e.g. [EG]). The *Cherednik algebra*  $H_c$  is an associative algebra with generators  $x_i, y_i, i = 1, \dots, n$ , and  $w \in W$ , with defining relations

$$\begin{aligned} [x_i, x_j] &= [y_i, y_j] = 0, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n \\ [y_i, x_j] &= \delta_{ij} + \sum_{s \in \Sigma} c_s \frac{(x_i, \alpha_s)(x_j, \alpha_s)}{(\alpha_s, \alpha_s)} s, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n \end{aligned}$$

$$wxw^{-1} = w(x), \quad wyw^{-1} = w(y), \quad w \cdot w' = ww', \quad \forall w, w' \in W, x \in \mathfrak{h}^*, y \in \mathfrak{h}.$$

This algebra was introduced by Cherednik as a rational limit of his double affine Hecke algebra defined in [Ch]. Notice that if  $c = 0$  then  $H_0 = \mathcal{D}(\mathfrak{h}) \rtimes \mathbf{C}[W]$ .

Lemma 3.10 implies that the algebra  $H_c$  is equipped with a homomorphism  $\phi: H_c \rightarrow \mathcal{A}$ , given by  $w \rightarrow w, x_i \rightarrow x_i, y_i \rightarrow D_{x_i}$ .

Cherednik proved the following theorem.

THEOREM 3.12 (Poincaré-Birkhoff-Witt theorem). *The multiplication map*

$$\mu: \mathbf{C}[\mathfrak{h}] \otimes \mathbf{C}[\mathfrak{h}^*] \otimes \mathbf{C}[W] \rightarrow H_c$$

*given by  $\mu(f(x) \otimes g(y) \otimes w) = f(x)g(y)w$  is an isomorphism of vector spaces.*

*Proof.* It is easy to see that the map  $\mu$  is surjective. Thus, we only have to show that it is injective. In other words, we need to show that monomials  $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n} w$  are linearly independent in  $H_c$ . To do this, it suffices to show that the images of these monomials under the homomorphism  $\phi$ , i.e.  $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} D_{x_1}^{j_1} \dots D_{x_n}^{j_n} w$ , are linearly independent.

Given an element  $A \in \mathcal{A}$ , writing  $A = \sum_{w \in W} P_w w$  with  $P_w \in \mathcal{D}(U)$  we define the order of  $A$ ,  $\text{ord} A$ , as the maximum of the orders of the  $P_w$ 's. Notice that  $\text{ord} AB \leq \text{ord} A + \text{ord} B$ . We now remark that for any sequence of non negative indices  $(i_1, \dots, i_n)$ ,

$$D_{x_1}^{i_1} \dots D_{x_n}^{i_n} = \partial_{x_1}^{i_1} \dots \partial_{x_n}^{i_n} + l.o.t.$$

Indeed this is true for  $D_{x_i}$ . We proceed by induction on  $r = i_1 + \dots + i_n$ . We can clearly assume  $i_1 > 0$ , so by induction,

$$D_{x_1}^{i_1} \dots D_{x_n}^{i_n} = (\partial_{x_1} + l.o.t.)(\partial_{x_1}^{i_1-1} \dots \partial_{x_n}^{i_n} + l.o.t.) = \partial_{x_1}^{i_1} \dots \partial_{x_n}^{i_n} + l.o.t.$$

From this we deduce that for any pair of multiindices  $I = (i_1, \dots, i_n)$ ,  $J = (j_1, \dots, j_n)$ ,  $w \in W$ , setting  $x_I = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ ,  $D_J = D_{x_1}^{j_1} \dots D_{x_n}^{j_n}$ ,  $\partial_J = \partial_{x_1}^{j_1} \dots \partial_{x_n}^{j_n}$ , we have

$$x_I D_J w = x_I \partial_J w + l.o.t.$$

Using this and the linear independence of the elements  $x_I \partial_J w$ , it is immediate to conclude that the elements  $x_I D_J w$  are linearly independent, proving our claim.  $\square$

REMARK 1. We see that the homomorphism  $\phi$  identifies  $H_c$  with the subalgebra of  $\mathcal{A}$  generated by  $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]$ , the Dunkl operators  $D_y$ ,  $y \in \mathfrak{h}$  and  $W$ .

REMARK 2. Another way to state the PBW theorem is the following. Let  $F^\bullet$  be a filtration on  $H_c$  defined by  $\deg(x_i) = \deg(y_i) = 1$ ,  $\deg(w) = 0$ . Then we have a natural surjective mapping from  $\mathbf{C}[\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*] \rtimes W$  to the associated graded algebra  $\text{gr}(H_c)$ . The PBW theorem claims that this map is in fact an isomorphism.

### 3.5 THE SPHERICAL SUBALGEBRA

Let us now introduce the idempotent

$$e = \frac{1}{W} \sum_{w \in W} w \in \mathbf{C}[W].$$