

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 49 (2003)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI
Autor: Capitanio, Gianmarco
Kapitel: 3.4 Triangles évanescents
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-66676>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

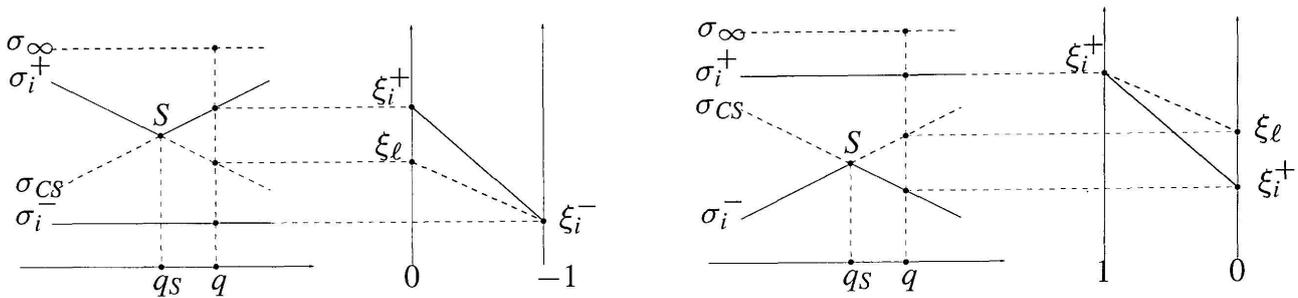


FIGURE 13

Diagrammes de Morse des configurations interdites (I) et (II)

On a ainsi démontré que notre décomposition est admissible. Comme la courbe legendrienne L dont F est la projection est isotope à $\{(q, 0, 0) \in J^1\mathbf{R}\}$, \tilde{F} est isotope au front lèvres. Ce front a une seule décomposition admissible, donc par le théorème de Chekanov-Pushkar, \tilde{F} aussi admet une unique décomposition admissible. \square

REMARQUES.

(1) Le Théorème 3.2 fournit un critère géométrique purement combinatoire qui permet de déterminer la solution de minimax d'un front d'onde (de type solution multivoque) de dimension 1: il suffit pour cela de trouver la seule décomposition admissible d'une compactification du front. La section associée à la section à l'infini est alors la section de Chaperon-Sikorav du front compactifié, ce qui détermine sans ambiguïté le graphe de la solution de minimax sur le front initial.

(2) Les axiomes qui définissent les décompositions admissibles d'un front d'onde ont été définis par Chekanov et Pushkar comme généralisation de la classification des points critiques d'une fonction de Morse en couple de fonctions critiques liés. En ce sens le Théorème 3.2 est le cas simple dont le théorème de Chekanov et Pushkar est la généralisation.

EXEMPLE 3.3. D'après l'exemple 3.1, le graphe de la solution de minimax associée au front montré à la Figure 14 est la section marquée par un trait plus épais.

3.4 TRIANGLES ÉVANESCENTS

Dans cette section on donne une méthode qui permet de remplacer un front d'onde de type solution multivoque par un front plus simple du même type et ayant le même minimax. Cela permet de déterminer le minimax du front initial en itérant cette méthode un nombre fini de fois.

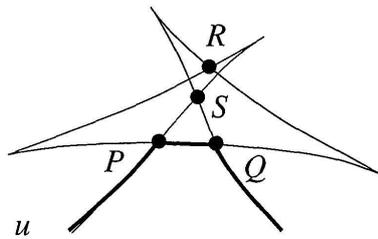


FIGURE 14

Soit $\{F_r\}_{r \in [0,1]}$ une famille à un paramètre de fronts de type solution multivoque, projection d'une isotopie legendrienne $\{L_r\}_{r \in [0,1]}$.

DÉFINITION. On appelle *intersection triple* une perestroïka de $\{F_r\}_{r \in [0,1]}$ de type "pyramide" (P), telle que le point triple soit l'intersection de trois branches de même indice.

REMARQUE. D'après la définition de décomposition admissible, la seule perestroïka de la famille $\{F_r\}_{r \in [0,1]}$ qui change de manière non continue l'unique décomposition admissible du front initial est l'intersection triple (Figure 15).

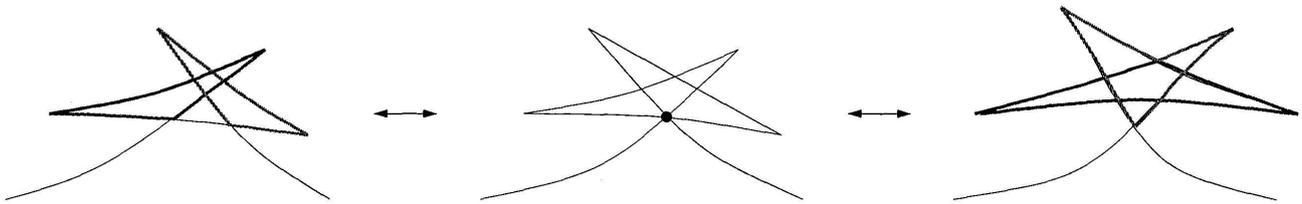


FIGURE 15

Changement de la décomposition admissible en passant par une intersection triple

Considérons maintenant le front F comme la trace d'une courbe Γ de $\mathbf{R}^2 = J^0\mathbf{R}$, paramétrée par $s \in \mathbf{R}$. Soit $D = \Gamma(s_0) = \Gamma(s_1)$, avec $s_0 < s_1$, un point double du front, intersection de deux branches de même indice. L'ensemble $\Gamma([s_0, s_1])$ est un *triangle de sommet D* s'il a exactement deux cusps. On note alors $\mathcal{T}(D)$ un tel triangle et, pour $\epsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, $F - \mathcal{T}(D)$ un front de type solution multivoque qui coïncide avec l'ensemble $\Gamma(\mathbf{R} \setminus [s_0, s_1])$ en dehors de la boule $\mathcal{B}_D(\epsilon)$ de \mathbf{R}^2 centrée en D de rayon ϵ , et qui est le graphe d'une fonction lisse à l'intérieur de cette boule (cf. Figure 16).

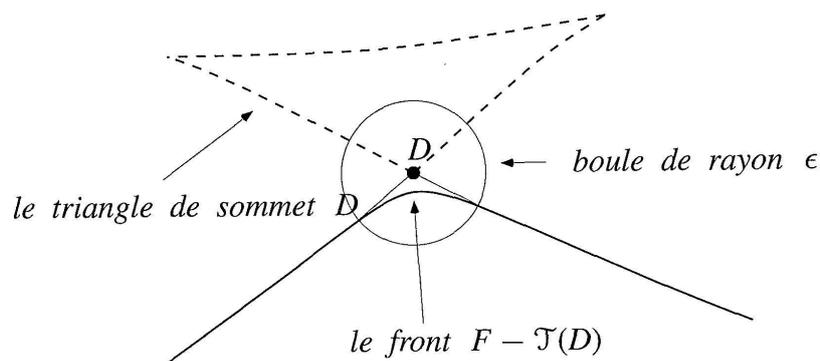


FIGURE 16

 Le front $F - \mathcal{T}(D)$

DÉFINITION. Un triangle $\mathcal{T}(D)$ de sommet D est *évanescent* s'il existe un chemin sans intersections triples entre F et $F - \mathcal{T}(D)$ dans l'espace des solutions multivoques.

EXEMPLE 3.4. Considérons le front de l'exemple 3.3, montré à la Figure 14. Les triangles $\mathcal{T}(P)$ et $\mathcal{T}(Q)$ sont évanescents, tandis que le triangle $\mathcal{T}(R)$ ne l'est pas (en effet pour l'effacer il faut forcément passer par une intersection triple au point S).

Soit $\mathcal{D} = \{X_0, \dots, X_n\}$ la décomposition admissible d'une compactification \tilde{F} d'un front de type solution multivoque F .

THÉORÈME 3.5. Si $n \geq 1$, au moins une des courbes X_i , avec $i > 0$, est un triangle évanescent.

Démonstration. Considérons le graphe (connexe) associé à la décomposition admissible de $\tilde{F} = \pi_1(\tilde{L})$, c'est-à-dire le graphe ayant un sommet pour chaque courbe $X_i \in \mathcal{D}$ et une arête entre deux sommets pour chaque point de saut entre les courbes correspondantes. D'après le théorème de Chekanov-Pushkar, le nombre $\#(\mathcal{D}) - \#(\mathcal{S})$ est invariant par isotopie legendrienne de \tilde{L} . Puisque \tilde{L} est isotope à un cercle dont la projection est le front lèvre, ce nombre est toujours 1 pour les fronts obtenus par compactification d'une solution multivoque. Or, $\#(\mathcal{D})$ étant le nombre de sommets et $\#(\mathcal{S})$ le nombre d'arêtes du graphe, on déduit que ce graphe est un arbre, dont les feuilles¹¹⁾ sont des triangles. Enfin, il est facile de voir que les triangles qui forment une courbe $X_i \in \mathcal{D}$ ($i > 0$) sont évanescents. \square

¹¹⁾ Les feuilles d'un arbre sont les sommets dont est issue une seule arête.

De toute évidence on a le fait suivant.

PROPOSITION 3.6. *Si un triangle $\mathcal{T}(D)$ est évanescent, alors les sections de minimax de F et de $F - \mathcal{T}(D)$ coïncident en dehors de $\mathcal{B}_D(\epsilon)$.*

REMARQUE. La Proposition 3.6 donne une méthode pour simplifier récursivement le front d'onde dont on cherche le minimax: on recherche parmi les triangles du front ceux qui sont évanescents. Après un nombre fini de pas, on efface tous les cusps du front; la section restant coïncide, en dehors d'un nombre fini de boules arbitrairement petites, avec le minimax du front initial.

EXEMPLE 3.7. Considérons le front générique F de type solution multivoque montré à la Figure 17. A côté de chaque branche on a noté son indice. La solution de minimax est la section mise en évidence.

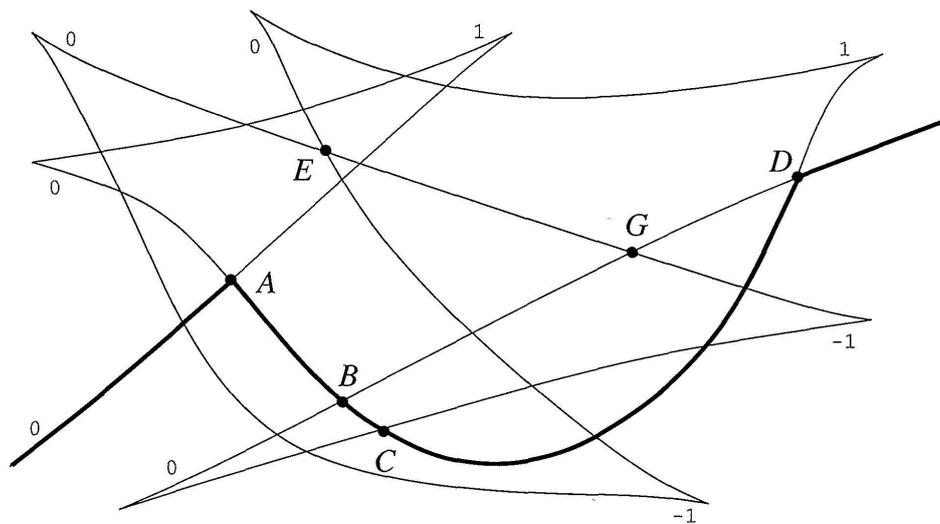


FIGURE 17

Pour montrer cela, on applique la Proposition 3.6: les triangles $\mathcal{T}(G)$ et $\mathcal{T}(E)$ sont évanescents (pour le premier c'est clair, pour le deuxième, il faut remarquer que la branche d'indice -1 de ce triangle peut traverser les points A , B et C). Donc en dehors de deux boules aussi petites que l'on veut, centrées en G et en E , les sections de minimax de F et de $F - \mathcal{T}(G) - \mathcal{T}(E)$ sont les mêmes (voir la Figure 18). Les triangles $\mathcal{T}(A)$ et $\mathcal{T}(D)$ du nouveau front sont de toute évidence évanescents, ce qui prouve que le minimax est bien celui annoncé.

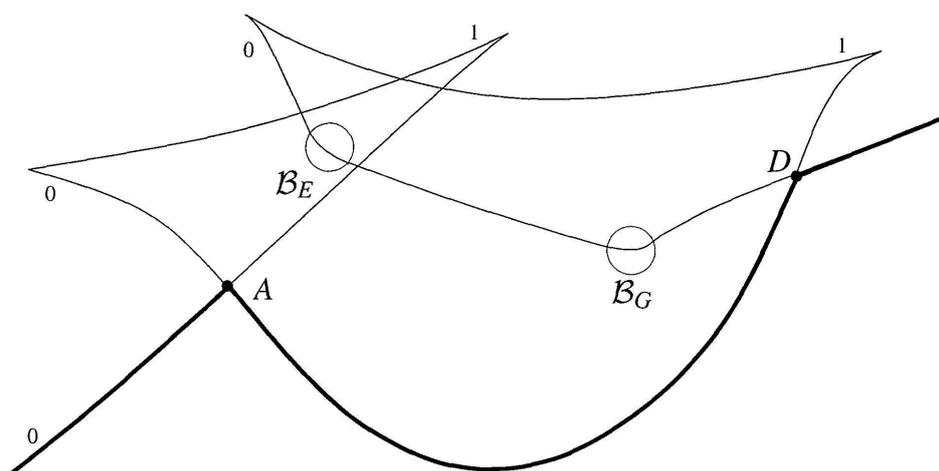


FIGURE 18

 Le front $F - \mathcal{J}(G) - \mathcal{J}(E)$

BIBLIOGRAPHIE

- [Ar1] ARNOLD, V.I. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Mir, Moscou, 1976.
- [Ar2] ——— *Singularities of Caustics and Wave Fronts*. Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [Ar3] ——— Invariants and perestroikas of wave fronts on the plane. *Proc. Steklov Inst. Math.* 209 (1995), 11–64.
- [Bar] BARANNIKOV, S.A. The framed Morse complex and its invariants. In: *Singularities and Bifurcations* (ed. V.I. Arnold). *Advances in Soviet Mathematics* 21, 93–115. Amer. Math. Society, 1994.
- [Car] CARDIN, F. The global finite structure of generic envelope loci for Hamilton-Jacobi equations. *J. Math. Phys.* (2) 43 (2002), 417–430.
- [Cer] CERF, J. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 39 (1970), 5–173.
- [Cha] CHAPERON, M. Lois de conservation et géométrie symplectique. *C.R. Acad. Sci. Paris* 312 série I (1991), 345–348.
- [Ch1] CHEKANOV, YU. Critical points of quasi-functions and generating families of legendrian manifolds. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* (2) 30 (1996), 56–69; trad. angl. *Funct. Anal. Appl.* (2) 30 (1996), 118–128.
- [Ch2] ——— New invariants of legendrian knots. *European Congress of Mathematics, Barcelona, Vol. II. Progress in Mathematics* 202. Birkhäuser, 2000.
- [C-P] CHEKANOV, YU. and P. PUSHKAR. Arnold’s four-cusp conjecture and invariants of legendrian knots. (En préparation.)
- [DNF] DUBROVIN, B. A., A. T. FOMENKO et S. P. NOVIKOV. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications*. Mir, Moscou, 1985.
- [Jou] JOUKOVSKAÏA, T. Singularités de minimax et solutions faibles d’équations aux dérivées partielles. Thèse de Doctorat à l’Université de Paris VII, 1993.
- [Mil] MILNOR, J. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.