Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 49 (2003)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI

Autor: Capitanio, Gianmarco

Kapitel: 2.3 La solution de minimax

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66676

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

COROLLAIRE. *Pour tout $T > 0$ fixé, Λ^T admet une unique fgqi $S(t, q; \xi)$ (modulo les opérations d'équivalence* (i) *et* (ii)*), telle que son graphe restreint à $t = 0$ coïncide avec le graphe de la donnée initiale u_0.*

Dans la suite, S sera toujours une telle fgqi.

Démonstration. Soit $\widetilde{S}(t, q; \xi)$ l'unique fgqi de Λ^T. Or, cette fonction est une primitive de la forme de Liouville $p\,dq$ de Λ_0 :

$$d\widetilde{S}(0, q; \bar{\xi}_0(q)) = du_0(q)\,dq\,,$$

où $\bar{\xi}_0(q)$ est le seul point critique de $\xi \mapsto S_0(q; \xi)$. Par conséquent il existe une unique constante C telle que $S := \widetilde{S} + C$ vérifie $S(0, q; \bar{\xi}_0(q)) = u_0(q)$ pour tout $q \in Q$. $\square$

REMARQUE. On peut construire une famille génératrice globale de la solution géométrique Λ comme suit. La *fonctionnelle d'action* $\int pdq - Hdt$ est une famille génératrice formelle (l'espace de paramètre étant de dimension infinie) de Λ. En utilisant une méthode de point fixe, proposée par Amann-Conley-Zehnder, on obtient une vraie fonction génératrice, voir [Car].

2.3 LA SOLUTION DE MINIMAX

Soient $t > 0, q \in Q$ et $S(t, q; \xi)$ la fgqi de la solution géométrique tronquée Λ^T, pour $T > t$. La fonction $\xi \mapsto S(t, q; \xi)$ est quadratique à l'infini, donc on peut lui associer le niveau critique de minimax, étudié au § 1.3.

DÉFINITION (Chaperon). On appelle *solution de minimax* de (PC) la fonction

$$u(t, q) := \min\max\{\xi \mapsto S(t, q; \xi)\}\,.$$

REMARQUE. L'autre solution que l'on peut construire avec ce même argument (cf. [Cha]), *la solution de max-min* est, pour le Théorème 1.9, la même solution.

M. Chaperon ([Cha]), T. Joukovskaïa ([Jou]), C. Viterbo ([Vi2]) ont étudié les propriétés de cette fonction; en particulier Joukovskaïa a classifié les singularités génériques de u en dimension petite ($\dim Q \leq 2$).

THÉORÈME 2.2 (Chaperon). *La solution de minimax est une solution faible*[7]) *de* (PC), *lipschitzienne sur chaque intervalle compact* $[0,T]$, *et indépendante du choix de la fgqi.*

REMARQUE. Pour le Théorème 1.8, on peut supposer, sans perte de généralité, que la solution géométrique de (PC) soit générique. Dans ce cas l'ensemble $\pi(\Sigma) \cup M_\Lambda$ est de mesure nulle.

Démonstration. Soit Λ générique. La continuité de la solution de minimax u est une conséquence immédiate de la stabilité du minimax par petites déformations. En effet, fixons un point (t_0, q_0) de l'espace-temps et un $\epsilon > 0$. Pour tout (t,q) assez proche de (t_0,q_0), la fonction $\xi \mapsto S(t,q;\xi)$ est une perturbation de $\xi \mapsto S(t_0,q_0;\xi)$ aussi petite que l'on veut. D'après le Théorème 1.8, on déduit que $|u(t_0,q_0) - u(t,q)| < \epsilon$.

Les autres propriétés de la solution de minimax sont simples à démontrer; on renvoie pour les détails aux travaux déjà cités.

Soit $(t_0,q_0) \notin M_\Lambda$, $t_0 > 0$. Par le théorème de la fonction implicite il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (t_0,q_0) dans $]0,+\infty[\times Q$ où le point critique libre de $\xi \mapsto S(t,q;\xi)$ est une fonction $\bar{\xi}(t,q)$ de classe C^1, définie par $\partial_\xi S(t,q;\xi) = 0$. Alors pour tout $(t,q) \in \mathcal{U}$ on a $u(t,q) = S(t,q;\bar{\xi}(t,q))$, donc u est de classe C^1, et vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi; en effet

$$\partial_t u(t,q) = \partial_t S(t,q;\bar{\xi}(t,q)), \quad \partial_q u(t,q) = \partial_q S(t,q;\bar{\xi}(t,q)),$$

et par définition de fgqi on a $\partial_t S(t,q;\bar{\xi}(t,q)) + H(t,q,\partial_q S(t,q;\bar{\xi}(t,q))) = 0$. Donc, en dehors de l'ensemble de Maxwell de Λ, u est dérivable et vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi. La solution de minimax satisfait la donnée initiale, parce que l'on a choisi la fgqi de la solution géométrique telle que $S(0,q;\bar{\xi}_0(q)) = u_0(q)$, où $\bar{\xi}_0(q)$ est le seul point critique de $\xi \mapsto S(0,q;\xi)$.

Pour tout $0 < T < +\infty$, $u|_{[0,T]}$ est lipschitzienne: en effet H et u_0 sont lipschitziens, donc en un temps fini les espaces tangents aux fronts d'onde ne sont jamais verticaux.

On déduit enfin du théorème de Viterbo que u ne dépend pas du choix de S parmi les fgqi de Λ telles que $S(0,q;\bar{\xi}(q)) = u_0(q)$. $\square$

REMARQUE. Viterbo a montré que les mêmes résultats restent vrais pour hamiltoniens et données initiales seulement lipschitziens, voir [Vi2]. On approche H et u_0 par des suites de fonctions $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ et $\{u_{0,n}\}_{n\in\mathbf{N}}$,

---

[7]) C'est-à-dire u est continue et presque partout dérivable, et en ces points vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi; de plus u satisfait la donnée initiale.

suffisamment régulières, convergentes vers H et u_0 respectivement. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ on construit la solution de minimax u_n du problème de Cauchy de hamiltonien H_n et donnée initiale $(u_{0,n})$; il suit que la limite $\lim_{n\to+\infty} u_n$ est la solution de minimax du problème de Cauchy de hamiltonien H et donnée initiale u_0.

3. Caractérisation géométrique de la solution de minimax

3.1 Notations

Soit $J^0\mathbf{R} = \{(q,z)\} \simeq \mathbf{R}^2$ l'espace des jets d'ordre 0 sur $\mathbf{R}$, $\pi_0 \colon J^0\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la projection naturelle $(q,z) \mapsto q$. Un front d'onde dans $J^0\mathbf{R}$ est la projection dans $J^0\mathbf{R}$ d'une courbe legendrienne de $J^1\mathbf{R} = \{(q,z,p)\} \simeq \mathbf{R}^3$ par $\pi_1 \colon (q,z,p) \mapsto (q,z)$. Pour un front générique, les seules singularités possibles sont des cusps et des auto-intersections transverses.

Soit F un front de $J^0\mathbf{R}$. On appelle *section* de F toute partie connexe maximale σ qui est le graphe d'une fonction $\chi_\sigma \colon \pi_0(\sigma) \to \mathbf{R}$ de classe C^1 par morceaux. Une *branche* de F est une section de classe C^1.

Un front est *long* si, en dehors d'un compact de $\mathbf{R}$, il est le graphe d'une fonction, *plat* si sa tangente n'est jamais verticale. On peut dans ce cas coorienter le front en fixant en tout point le vecteur orthonormal dont la coordonnée en z est positive. Si le front est ainsi orienté, on peut distinguer deux types de cusp : *montant*, si en suivant le front, on passe d'une branche à l'autre en la direction de la normale fixée, *descendent* si on passe en la direction opposée.

Deux courbes legendriennes de $J^1\mathbf{R}$ sont *isotopes* (par une isotopie *legendrienne*) s'il existe un chemin de l'une à l'autre dans l'espace des courbes legendriennes plongées de $J^1\mathbf{R}$. Pour la famille correspondante de fronts les perestroikas qui interviennent génériquement sont montrés à la Figure 6; il s'agit des projections des mouvements de Reidemeister pour les nœuds relèvement des fronts dans l'espace de contact (voir par exemple [Ar3]) : *queue d'aronde* (Q), *pyramide* (P), *porte-monnaie* (B) et *auto-tangence sûre*[8]) (J^-).

Les auto-tangences dangereuses[9]) sont interdites car elles correspondent à un point d'auto-intersection de la courbe legendrienne dont le front est la projection. Pour un front plat toutes les auto-tangences sont dangereuses.

---

[8]) Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est opposée.

[9]) Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est la même.