

# 1.1 DEFINITION

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## SYMPLECTIC CHARACTERISTIC CLASSES

by Cornelia BUSCH

ABSTRACT. We present a new proof of the fact that the universal symplectic classes  $d_j(\mathbf{Z}) \in H^{2j}(\mathrm{Sp}(\mathbf{Z}), \mathbf{Z})$  have infinite order. This proof uses only techniques from group cohomology. In order to obtain this result, we determine representations  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \mathrm{U}((p-1)/2)$  whose associated representation  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{R})$  factors, up to conjugation, through a representation  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z})$ .

In this article we prerequire some basic notions from the theory of cyclotomic fields. For the reader who is not familiar with this subject we recommend the books of Washington [12] and of Neukirch [9]. An introduction to the arithmetical part is also given in my thesis [6].

This article presents a result of my doctoral thesis, which I wrote at the ETH Zurich under the supervision of G. Mislin, whom I want to thank for his excellent support.

### 1. THE SYMPLECTIC GROUP

#### 1.1 DEFINITION

Let  $R$  be a commutative ring with 1. The general linear group  $\mathrm{GL}(n, R)$  is defined to be the multiplicative group of invertible  $n \times n$ -matrices over  $R$ .

DEFINITION. The *symplectic group*  $\mathrm{Sp}(2n, R)$  over the ring  $R$  is the subgroup of matrices  $Y \in \mathrm{GL}(2n, R)$  that satisfy

$$Y^T J Y = J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

where  $I_n$  is the  $n \times n$ -identity matrix.

It is the group of isometries of the skew-symmetric bilinear form

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: R^{2n} \times R^{2n} &\longrightarrow R \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle := x^T J y. \end{aligned}$$

It follows from a result of Bürgisser [5] that elements of odd prime order  $p$  exist in  $\text{Sp}(2n, \mathbf{Z})$  if and only if  $2n \geq p - 1$ .

**PROPOSITION 1.1.** *The eigenvalues of a matrix  $Y \in \text{Sp}(p - 1, \mathbf{Z})$  of odd prime order  $p$  are the primitive  $p$ -th roots of unity, hence the zeros of the polynomial*

$$m(x) = x^{p-1} + \dots + x + 1.$$

*Proof.* If  $\lambda$  is an eigenvalue of  $Y$ , we have  $\lambda = 1$  or  $\lambda = \xi$ , a primitive  $p$ -th root of unity, and the characteristic polynomial of  $Y$  divides  $x^p - 1$  and has integer coefficients. Since  $m(x)$  is irreducible over  $\mathbf{Q}$ , the claim follows.  $\square$

## 1.2 A RELATION BETWEEN $U\left(\frac{p-1}{2}\right)$ AND $\text{Sp}(p - 1, \mathbf{Z})$

Let  $X \in U(n)$ , i.e.,  $X \in \text{GL}(n, \mathbf{C})$  and  $X^*X = I_n$  where  $X^* = \bar{X}^T$  and  $I_n$  is the  $n \times n$ -identity matrix. We can write  $X = A + iB$  with  $A, B \in M(n, \mathbf{R})$ , the ring of real matrices. We now define the following map

$$\begin{aligned} \phi: U(n) &\longrightarrow \text{Sp}(2n, \mathbf{R}) \\ X = A + iB &\longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} =: \phi(X). \end{aligned}$$

The map  $\phi$  is an injective homomorphism. Moreover, it is well-known that  $\phi$  maps  $U(n)$  onto a maximal compact subgroup of  $\text{Sp}(2n, \mathbf{R})$ . In this section we will prove the following theorem.

**THEOREM 1.2.** *Let  $X \in U((p - 1)/2)$  be of odd prime order  $p$ . We define  $\phi: U((p - 1)/2) \rightarrow \text{Sp}(p - 1, \mathbf{R})$  as above. Then  $\phi(X) \in \text{Sp}(p - 1, \mathbf{R})$  is conjugate to  $Y \in \text{Sp}(p - 1, \mathbf{Z})$  if and only if the eigenvalues  $\lambda_1, \dots, \lambda_{(p-1)/2}$  of  $X$  are such that*

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_{(p-1)/2}, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{(p-1)/2}\}$$

*is a complete set of primitive  $p$ -th roots of unity.*