

3. Curvature zero 2-planes in $S^a \times H^a \times T^b$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

More generally let $n \geq 3$ and let $\{e_1, \dots, e_n\}$ be an orthonormal basis for V . If we impose the condition that $Q_K(e_i \wedge e_j) = 0$ with $i < j$, then we have imposed $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions. Since the dimension of the space of algebraic curvature tensors is $\frac{n^2(n^2-1)}{12} > \frac{n(n-1)}{2}$, a simple counting argument then shows there are non-trivial algebraic curvatures with $Q_K(e_i \wedge e_j) = 0$ for $i < j$; thus Assertion 1.1 fails in the algebraic setting.

3. CURVATURE ZERO 2-PLANES IN $S^a \times H^a \times T^b$

In this section we discuss two examples showing Assertion 1.1 is false. Let H^a , S^a , and T^b be spaces of constant sectional curvature -1 , $+1$, and 0 where $a \geq 2$. We begin by studying orthonormal frame fields.

PROPOSITION 3.1. *Let $M(a, b) := S^a \times H^a \times T^b$ with the product metric, where $a \geq 2$. There exists a local orthonormal frame $\{e_i\}$ for the tangent bundle of $M(a, b)$ such that $Q(e_i \wedge e_j) = 0$ for $1 \leq i < j \leq 2a + b$.*

Proof. Let $\{u_i\}$ and $\{v_i\}$ be local orthonormal frames for the tangent bundles of S^a and H^a for $1 \leq i \leq a$. Let $\{w_j\}$ be a local orthonormal frame for the tangent bundle of T^b for $1 \leq j \leq b$. Define

$$\begin{aligned} e_{2i-1} &:= \frac{u_i + v_i}{\sqrt{2}} & \text{for } 1 \leq i \leq a, \\ e_{2i} &:= \frac{u_i - v_i}{\sqrt{2}} & \text{for } 1 \leq i \leq a, \\ e_{2a+j} &:= w_j & \text{for } 1 \leq j \leq b. \end{aligned}$$

The $\{e_k\}$ for $1 \leq k \leq 2a + b$ form a local orthonormal frame for the tangent space of $M(a, b) := S^a \times H^a \times T^b$. We have $\langle R(u_i, w_j) w_j, u_i \rangle = 0$, $\langle R(v_i, w_j) w_j, v_i \rangle = 0$, and $\langle R(v_i, w_j) w_j, u_i \rangle = 0$. Thus $Q(e_i \wedge e_j) = 0$ if either $i > 2a$ or $j > 2a$. We also have $\langle R(u_{i_1}, u_{i_2}) u_{i_2}, u_{i_1} \rangle = +1$ and $\langle R(v_{i_1}, v_{i_2}) v_{i_2}, v_{i_1} \rangle = -1$ for $i_1 < i_2$. We can show that $Q(e_i \wedge e_j) = 0$ for $i \leq 2a$ and $j \leq 2a$ by computing:

$$\begin{aligned} \langle R(e_1, e_2) e_2, e_1 \rangle &= 0, \\ \langle R(e_1, e_3) e_3, e_1 \rangle &= \frac{1}{4} \{ \langle R(u_1, u_2) u_2, u_1 \rangle + \langle R(v_1, v_2) v_2, v_1 \rangle \} = 0, \\ \langle R(e_1, e_4) e_4, e_1 \rangle &= \frac{1}{4} \{ \langle R(u_1, u_2) u_2, u_1 \rangle + (-1)^2 \langle R(v_1, v_2) v_2, v_1 \rangle \} = 0, \text{ etc. } \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 3.1 deals with orthonormal frames. We now turn to coordinate frames. If $(x_1, \dots, x_n)$ is a system of local coordinates, set $\partial_i^x := \frac{\partial}{\partial x_i}$.

PROPOSITION 3.2. *Let $M(2, b) := S^2 \times H^2 \times T^b$. There exist local coordinates $(u_1, \dots, u_{4+b})$ on $M(2, b)$ such that $Q(\partial_i^u \wedge \partial_j^u) = 0$ for $1 \leq i < j \leq 4 + b$.*

Let ω be the volume form. Before beginning the proof of Proposition 3.2, we recall the following technical result and refer to [K, p. 6] for details:

LEMMA 3.3. *Let M^n be an orientable Riemannian manifold. Then around each point there exists a coordinate system $\{x_1, \dots, x_n\}$ such that $\omega(\partial_1^x, \dots, \partial_n^x) = 1$.*

Proof of Proposition 3.2. We use Lemma 3.3 to find local coordinates (x_1, x_2) and (y_1, y_2) on S^2 and H^2 such that $\omega(\partial_1^x, \partial_2^x) = 1$ and $\omega(\partial_1^y, \partial_2^y) = 1$. Let $(z_1, \dots, z_b)$ be the usual flat coordinates on T^b . Define local coordinates on $S^2 \times H^2 \times T^b$ by:

$$u_1 := x_1 + y_1, \quad u_2 := x_1 - y_1, \quad u_3 := x_2 + y_2, \quad u_4 := x_2 - y_2,$$

and $u_{k+4} = z_k$ for $1 \leq k \leq b$. We then have

$$\partial_1^u = \partial_1^x + \partial_1^y, \quad \partial_2^u = \partial_1^x - \partial_1^y, \quad \partial_3^u = \partial_2^x + \partial_2^y, \quad \partial_4^u = \partial_2^x - \partial_2^y,$$

and $\partial_{4+k}^u = \partial_k^z$ for $k > 0$. If N is a Riemann surface with constant sectional curvature ϵ , then $\langle R(x, y)y, x \rangle = \epsilon \omega(x, y)$. Thus, the calculations performed in the proof of Proposition 3.1 show that $Q(\partial_i^u \wedge \partial_j^u) = 0$. $\square$

4. CURVATURE ZERO 2-PLANES IN WARPED PRODUCTS

We can use warped products to construct additional examples where Assertion 1.1 fails. We adopt the notation of [O, p. 210].

PROPOSITION 4.1. *Let $M = B \times_f F$ be a warped product, where B is a small open ball around $(0, 0)$ in $\mathbf{R}^2$, where $f(x, y) = x + y + xy + 1$ is positive, and where $F = \mathbf{R}$. Then M is not flat. Furthermore $Q(\partial_x \wedge \partial_y) = 0$, $Q(\partial_x \wedge \partial_z) = 0$, and $Q(\partial_y \wedge \partial_z) = 0$.*

Proof. We use [O, p. 210, Proposition 42], to compute:

$$\begin{aligned} \langle R(\partial_x, \partial_y) \partial_x, \partial_z \rangle &= 0, & \langle R(\partial_x, \partial_z) \partial_x, \partial_z \rangle &= 0, \\ \langle R(\partial_y, \partial_z) \partial_y, \partial_z \rangle &= 0, & \langle R(\partial_x, \partial_z) \partial_z, \partial_y \rangle &= f. \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 4.1 generalizes to higher dimensions by taking products with flat tori.