Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV
Autor: Louvet, Nicolas
Kapitel: 3.6 Fonctions conditionnellement de type positif
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65439

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Pour α, π et β comme ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes (voir [HaVa], chapitre 4, lemme 3):

(i) α possède un point fixe;

(ii) α possède une orbite bornée;

(iii) toute orbite de α est bornée;

(iv) le cocycle b associé à α est borné;

(v) le cocycle b associé à α est un cobord.

3.6 Fonctions conditionnellement de type positif

Si $b\colon G \to \mathcal{H}$ est un cocycle continu pour la représentation π alors la fonction ψ définie par

$$\psi(g) = -\|b(g)\|^2 \qquad \text{pour tout } g \in G\,,$$

est *conditionnellement de type positif*: pour tous $g_1, \ldots, g_n \in G$, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \lambda_i \, \psi(g_j^{-1} g_i) \geq 0\,.$$

La fonction ψ est normalisée ($\psi(e) = 0$) et symétrique ($\psi(g) = \psi(g^{-1})$). Réciproquement, à une telle fonction continue ψ, on associe le triple GNS $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ où π_ψ est une représentation orthogonale de G dans l'espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_\psi$ et b_ψ est un cocycle à coefficients dans $\mathcal{H}_\psi$ tel que, d'une part, le sous-espace engendré par $b_\psi(G)$ est dense dans $\mathcal{H}_\psi$, et d'autre part, pour tout $g \in G$, on a

$$\psi(g) = -\frac{1}{2}\|b_\psi(g)\|^2\,.$$

Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f\colon G \to \mathbf{R}$ de support fini et telles que $\sum_{x\in G} f(x) = 0$ alors $\mathcal{H}_\psi$ est l'espace de Hilbert réel obtenu en séparant et complétant V pour la forme bilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y\in G} f(x)\, h(y)\, \psi(y^{-1}x)$$

et b_ψ applique $g \in G$ sur la classe dans $\mathcal{H}_\psi$ de la différence des fonctions caractéristique de g et e. La représentation π_ψ est déduite de l'action par multiplication à gauche de G sur V.

Soit π une représentation, b un 1-cocycle à coefficients dans π et $\psi = -\|b\|^2$ la fonction conditionnellement de type positif correspondante. On

note $\overline{\pi}$ la représentation conjuguée de π dans l'espace de Hilbert conjugué $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{b}$ le 1-cocycle à coefficients dans $\overline{\pi}$ correspondant à b. On peut alors réaliser $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ de la façon suivante: le cocycle b_ψ est donné par $b_\psi(g) = b(g) + \overline{b}(g)$, l'espace $\mathcal{H}_\psi$ est le sous-espace réel fermé de $\mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$ engendré par $b_\psi(G)$, et π_ψ est la sous-représentation de $\pi \oplus \overline{\pi}$ obtenue en restreignant l'action de $\pi \oplus \overline{\pi}$ au sous-espace réel invariant $\mathcal{H}_\psi$ (voir [Del], remarque V.3). De plus, pour tous $x, g \in G$, on a l'égalité

$$\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle = \psi(g^{-1}xg) - \psi(g^{-1}x) - \psi(xg) + \psi(x)\,. \tag{3.1}$$

4. Preuve du théorème

Soient π une représentation factorielle du groupe G telle que

$$\mathrm{H}^1(G, \pi) \neq 0$$

et b un 1-cocycle continu à coefficients dans π qui n'est pas un cobord. Il s'agit de montrer que le support de π est contenu dans le cortex de G.

4.1 Stratégie

On considère la fonction conditionnellement de type positif $\psi\colon G \to \mathbf{R}$ définie par

$$\psi(x) = -\|b(x)\|^2$$

et le triple GNS $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ correspondant.

Pour tout $g \in G$ on a une fonction

$$\psi^g\colon G \longrightarrow \mathbf{C}\colon x \longmapsto \langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle$$

qui est de type positif et qu'on va décomposer en une somme

$$\psi^g = \varphi^g + \chi^g \tag{4.1}$$

de deux fonctions de type positif (proposition 4.7).

Soit $\widetilde{\mathcal{V}}$ un voisinage de 1_G dans $\widehat{G}$. En utilisant l'hypothèse que b n'est pas un cobord, nous montrons qu'il existe $g \in G$ tel que la fonction φ^g est non nulle (proposition 4.8) et limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons linéaires de fonctions de type positif associées à des représentations de $\widetilde{\mathcal{V}}$ (proposition 4.10).

La fin de la preuve est alors standard, et se déroule comme suit. Soit $(\mathcal{K}, \rho, \xi)$ le triple GNS défini par φ^g. Il résulte de l'assertion ci-dessus que