Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 46 (2000)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ARITHMETIC OF BINARY CUBIC FORMS
Autor: HOFFMAN, J. William / MORALES, Jorge

Kurzfassung

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64795>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ARITHMETIC OF BINARY CUBIC FORMS

by J. William HOFFMAN and Jorge MORALES

ABSTRACT. This paper explores a connection between the theory of binary cubic forms and binary quadratic forms that was first discovered for forms over $\mathbf{Z}$ by Eisenstein. We generalize Eisenstein's theory to cubic forms over an arbitrary integral domain of characteristic not 2 or 3 using Kneser's Clifford algebra interpretation of the composition of quadratic forms.

1. INTRODUCTION

An important problem of number theory is the classification of binary n -forms

$$F(\mathbf{x}) = a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1}x_2 + \cdots + a_{n-1}x_1x_2^{n-1} + a_nx_2^n,$$

where the coefficients a_i are integers, up to $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ -equivalence.

In *Disquisitiones Arithmeticae* Gauss presented a systematic theory for $n = 2$, based in part on earlier researches of Fermat, Euler, Lagrange and Legendre. Recall that a composition of two binary quadratic forms q and q' is a quadratic form q'' such that there exists a bilinear map $B: \mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ with the property $q''(B(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = q(\mathbf{x})q'(\mathbf{y})$. One of the most remarkable discoveries of Gauss is that the set of $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ -equivalence classes of binary primitive quadratic forms of given discriminant D is a finite abelian group with respect to composition of quadratic forms. This group was later interpreted by Dedekind in terms of ideal class groups.