

## 3. A REDUCTION

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 3. A REDUCTION

To prove the Spectral Mapping Theorem it suffices to verify that it holds for the polynomial ring  $k[t_0, \dots, t_m]$  in variables  $t_0, \dots, t_m$  over  $k$ , and for the polynomial  $F(x) = t_0 + t_1x + \dots + t_mx^m$ . This is because any polynomial  $G(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$  with coefficients in a ring  $R$  containing  $k$  as a subring is the image of  $F(x)$  by the map  $g: k[t_0, \dots, t_m][x] \rightarrow R[x]$  defined by  $g(a) = a$  for  $a \in k$ , by  $g(t_i) = b_i$  for  $i = 0, \dots, m$ , and by  $g(x) = x$ . If we can prove the equality  $\det F(M) = \prod_{i=1}^n F(\lambda_i)$  in  $k[t_0, \dots, t_m]$  we obtain that  $\det G(M) = g(\det F(M)) = \prod_{i=1}^n g(F(\lambda_i)) = \prod_{i=1}^n G(\lambda_i)$  in  $R$ .

## 4. THE PROOF

Clearly (2.1) holds when  $F$  is a constant  $a$  where it simply states that  $\det(aI_n) = a^n$ . We shall prove (2.1) for polynomials  $F$  of degree  $m > 0$  by induction on  $m$ .

We first note that if  $F(x)$  has a root  $\lambda$  in  $R$ , so that  $F(x) = (x - \lambda)G(x)$  in  $R[x]$ , then (2.1) holds for  $F(x)$ . Indeed,  $G(x)$  is of degree  $m - 1$  so it follows from the induction hypothesis that  $\det G(M) = \prod_{i=1}^n G(\lambda_i)$ . Since  $F(M) = (M - \lambda I_n)G(M)$  we obtain:

$$\begin{aligned} \det F(M) &= \det(M - \lambda I_n) \det G(M) \\ &= \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) \prod_{i=1}^n G(\lambda_i) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) G(\lambda_i) = \prod_{i=1}^n F(\lambda_i). \end{aligned}$$

As we saw in Section 3 it suffices to prove the result for the ring  $Q = k[t_0, \dots, t_m]$  and the polynomial  $F(x) = t_0 + t_1x + \dots + t_mx^m$ . Let  $x$  and  $y$  be independent variables over the ring  $Q$ . The polynomial  $F(x) - F(y)$  in  $x$  with coefficients in  $Q[y]$  has the root  $x = y$ . Hence, as we just observed, (2.1) holds for the polynomial  $F(x) - F(y)$ . We obtain the equation:

$$(4.1) \quad \det(F(M) - F(y)I_n) = \prod_{i=1}^n (F(\lambda_i) - F(y))$$

in  $Q[y]$ .

The equation (2.1) is a consequence of (4.1). To see this we observe that  $F(y)$  in  $Q[y]$  is transcendental over  $Q$ , that is the element  $F(y)$  in  $Q[y]$  does not satisfy a polynomial relation  $a_0 + a_1F(y) + \dots + a_lF(y)^l = 0$  with coefficients  $a_i$  in  $Q$  and  $a_l \neq 0$ , because the coefficient  $a_l t_m^l$  of the highest