Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 46 (2000)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE
Autor: Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha
Kapitel: 2.4 Les $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -modules invariants par translation
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64803>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

2.4 LES $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ -MODULES INVARIANTS PAR TRANSLATION

Nous allons voir que l'identité (6) est vérifiée pour une classe assez vaste d'EBD invariants par translation.

On dit que E est un $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ -module si, pour tous $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $f \in E$, on a $gf \in E$. Notons qu'alors l'opérateur linéaire $f \mapsto gf$ est borné sur E et donc que la fonction g admet une norme en tant que *multiplicateur ponctuel* de E :

$$\|g\|_{M(E)} = \sup\{\|gf\|_E : \|f\|_E \leq 1\}.$$

THÉORÈME 2. Soit E un EBD satisfaisant les trois propriétés suivantes :

(P₀) $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est un sous-espace dense de E ;

(P₁) pour tout $f \in E$ et $t \in \mathbf{R}^n$, on a $\tau_t f \in E$ et $\|\tau_t f\|_E = \|f\|_E$;

(P₂) E est un $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ -module et, pour tout $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, on a :

$$\sup_{\lambda \geq 1} \|h_\lambda g\|_{M(E)} < +\infty.$$

Alors, pour $m \in \mathbf{Z}$,

1. E' possède les propriétés (P₁) et (P₂) ;
2. $W^m(E)$ possède les propriétés (P₀), (P₁) et (P₂) ;
3. $(W^m(E))' = W^{-m}(E')$.

Preuve. Le fait que E' et $W^m(E)$ possèdent les propriétés (P₁) et (P₂) se vérifie sans difficulté. La preuve de la seconde assertion repose sur les résultats classiques suivants :

LEMME 1. Si E vérifie (P₀) et (P₁), alors, pour tous $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $f \in E$, on a $g * f \in E$ et $\|g * f\|_E \leq \|g\|_1 \|f\|_E$; la même estimation est satisfaite dans E' et dans $W^m(E)$ ($m \in \mathbf{Z}$).

LEMME 2. Sous les hypothèses du théorème 2, on a, pour tous $f \in E$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(h_k g) = g(0)f \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} k^n (h_{1/k} g) * f = \left(\int g(x) dx \right) f$$

dans l'espace de Banach E .

A l'aide du lemme 2, on montre aisément que, pour $f \in W^m(E)$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f \rho_k = f, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k * f = f$$

en norme $W^m(E)$; la densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $W^m(E)$ en découle aussitôt.

Il reste à prouver l'inclusion $W^m(E') \subset (W^{-m}(E))'$, pour $m > 0$. Soit f une distribution à support compact appartenant à $W^m(E')$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$; en appliquant la proposition 4 à $f * \varphi_k$ et g , on obtient :

$$|\langle f * \varphi_k, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)};$$

puisque $\tilde{\varphi}_k * g \rightarrow g$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, il vient

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)},$$

autrement dit $f \in W^{-m}(E)'$. Si f est un élément quelconque de $W^m(E')$, on approche f par les $f\rho_k$ et on conclut comme ci-dessus.

REMARQUE. L'étude de la dualité des $W^m(E)$ peut se conduire dans le cadre plus général de l'échelle de Sobolev associée à un C_0 -groupe (voir le chapitre III de [1], notamment le théorème 3.3.28).

3. RÉSULTATS POSITIFS EN DIMENSION UN

THÉORÈME 3. Soit E un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, ayant les propriétés (P_0) et (P_1) ; soit $m > 0$. Alors

$$E = W^{-m}(W^m(E)), \quad E' = W^{-m}(W^m(E')).$$

Si de plus E satisfait (P_2) , alors les échelles de Sobolev d'origines E et E' sont invariantes.

Preuve. D'après le lemme 1, l'opérateur défini par

$$Tf = \int_0^\infty e^{-t\tau_t} f dt$$

est borné sur E . Puisque $(Tf)' = f - Tf$ pour $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, la même propriété est vraie au sens des distributions quel que soit $f \in E$. On en déduit aussitôt que T^m est un opérateur borné de E dans $W^m(E)$. Si $f \in E$ et $g = T^m(f)$, il vient

$$f = \sum_{j=0}^m C_m^j g^{(j)},$$

de sorte que f appartient à $W^{-m}(W^m(E))$. On peut aussi définir T sur E' , à l'aide de la formule