

4.1 A SYMMETRY PROPERTY IN t

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

where the power series converges in the domain $\mathfrak{D}$, and

$$a_{-1}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{p}, & \text{if } \chi = 1 \\ 0, & \text{if } \chi \neq 1. \end{cases} \quad \square$$

Since $L_p(s, \tau; \chi)$ is defined for each $\tau \in \mathbf{C}_p$ such that $|\tau|_p \leq 1$, we now have a p -adic function of two variables, $L_p(s, t; \chi)$, where $s \in \mathfrak{D}$, $s \neq 1$ if $\chi = 1$, and $t \in \mathbf{C}_p$ with $|t|_p \leq 1$.

4. PROPERTIES OF $L_p(s, t; \chi)$

Most of the properties that follow are direct consequences of similar properties that hold for the generalized Bernoulli polynomials. In all of the following we will take p prime and χ a Dirichlet character with conductor f_χ .

4.1 A SYMMETRY PROPERTY IN t

The first property we obtain regarding $L_p(s, t; \chi)$ is a direct consequence of the generalized Bernoulli polynomials being either odd or even functions, except when $\chi = 1$. Recall that $L_p(s, t; \chi)$ interpolates the values

$$(18) \quad L_p(1 - n, t; \chi) = -\frac{1}{n} b_n(t),$$

for $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 1$, and $t \in \mathbf{C}_p$, $|t|_p \leq 1$, where

$$(19) \quad b_n(t) = B_{n, \chi_n}(qt) - \chi_n(p)p^{n-1}B_{n, \chi_n}(p^{-1}qt),$$

and we define

$$(20) \quad c_n(t) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-1)^{n-m} b_m(t).$$

LEMMA 4.1. For all $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$, we have

$$B_{n,1}(-t) = (-1)^n B_{n,1}(t) - (-1)^n n t^{n-1}.$$

Proof. This holds for $n = 0$ since $B_{0,1}(t) = 1$. Now assume that $n \geq 1$. Because $B_{n,1} = 0$ for odd $n \geq 3$, we can write (2) in the form

$$B_{n,1}(t) = \sum_{\substack{m=0 \\ n-m \text{ even}}}^n \binom{n}{m} B_{n-m,1} t^m + n B_{1,1} t^{n-1}.$$

Any m such that $n - m$ is even must have the same parity as n . Thus

$$\begin{aligned} B_{n,1}(-t) &= (-1)^n \sum_{\substack{m=0 \\ n-m \text{ even}}}^n \binom{n}{m} B_{n-m,1} t^m + (-1)^{n-1} n B_{1,1} t^{n-1} \\ &= (-1)^n B_{n,1}(t) - 2(-1)^n n B_{1,1} t^{n-1}. \end{aligned}$$

From the value $B_{1,1} = -B_1 = 1/2$, the lemma then follows. $\square$

LEMMA 4.2. For all $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$,

$$b_n(-t) = \chi(-1)b_n(t).$$

Proof. This is obviously true for $n = 0$ since

$$b_0(t) = (1 - \chi(p)p^{-1}) B_{0,\chi},$$

and $B_{0,\chi} = 0$ except when $\chi = 1$, in which case $B_{0,1} = 1$. So we can assume that $n \geq 1$.

First consider the case of $\chi_n = 1$. This implies that $\chi = \omega^n$. By Lemma 4.1,

$$\begin{aligned} b_n(-t) &= B_{n,1}(-qt) - p^{n-1} B_{n,1}(-p^{-1}qt) \\ &= (-1)^n B_{n,1}(qt) - (-1)^n n (qt)^{n-1} \\ &\quad - p^{n-1} \left((-1)^n B_{n,1}(p^{-1}qt) - (-1)^n n (p^{-1}qt)^{n-1} \right) \\ &= (-1)^n (B_{n,1}(qt) - p^{n-1} B_{n,1}(p^{-1}qt)) \\ &= (-1)^n b_n(t). \end{aligned}$$

Since $\chi = \omega^n$ and $\omega(-1) = -1$, the lemma holds for $\chi_n = 1$.

Now suppose that $\chi_n \neq 1$. Then, from (3),

$$\begin{aligned} b_n(-t) &= B_{n,\chi_n}(-qt) - \chi_n(p)p^{n-1} B_{n,\chi_n}(-p^{-1}qt) \\ &= (-1)^n \chi_n(-1) (B_{n,\chi_n}(qt) - \chi_n(p)p^{n-1} B_{n,\chi_n}(p^{-1}qt)) \\ &= (-1)^n \chi_n(-1) b_n(t). \end{aligned}$$

Note that $\chi_n = \chi\omega^{-n}$, which implies that $\chi_n(-1) = (-1)^n \chi(-1)$. Thus the lemma also holds for $\chi_n \neq 1$.

Since the lemma holds for both $\chi_n = 1$ and $\chi_n \neq 1$, the proof must be complete. $\square$

Using this result, we can prove

THEOREM 4.3. Let $t \in \mathbf{C}_p$, $|t|_p \leq 1$, and $s \in \mathfrak{D}$, except $s \neq 1$ if $\chi = 1$. Then

$$L_p(s, -t; \chi) = \chi(-1)L_p(s, t; \chi).$$

Proof. From Lemma 4.2 we see that

$$b_n(-t) = \chi(-1)b_n(t).$$

Also, (20) implies that

$$c_n(-t) = \chi(-1)c_n(t).$$

From (16), whenever $n \geq -1$,

$$a_n(-t) = \chi(-1)a_n(t),$$

which implies that

$$L_p(s, -t; \chi) = \chi(-1)L_p(s, t; \chi). \quad \square$$

If $\chi(-1) = -1$ and $t = 0$, then

$$L_p(s, 0; \chi) = -L_p(s, 0; \chi),$$

which implies that

$$L_p(s; \chi) = -L_p(s; \chi),$$

and thus $L_p(s; \chi) = 0$ for all $s \in \mathfrak{D}$, as we would expect.

4.2 $L_p(s, t; \chi)$ AS A POWER SERIES IN $t - \alpha$, $\alpha \in \mathbf{C}_p$, $|\alpha|_p \leq 1$

To develop $L_p(s, t; \chi)$ in terms of a power series in t will enable us to find a derivative of this function with respect to this second variable. All this we shall do, but before doing so we need to specify some notation.

LEMMA 4.4. Let $t \in \mathbf{C}_p$, $|t|_p \leq 1$. Then for $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 1$,

$$\lim_{s \rightarrow 1-n} \binom{-s}{n} L_p(s+n, t; \chi) = -\frac{1}{n} (1 - \chi(p)p^{-1}) B_{0, \chi}.$$

Proof. Recall that, from Theorem 3.13, we can write

$$L_p(s, t; \chi) = \frac{a_{-1}(t)}{s-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)(s-1)^m,$$

where $a_{-1}(t) = (1 - \chi(p)p^{-1})B_{0, \chi}$. Thus