Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 45 (1999)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VERSION DE DIAMOND DE LA MÉTHODE DE L'HYPERBOLE DE DIRICHLET

Autor: Balazard, Michel

Kapitel: 4. Une application

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64448

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Enfin,

$$\left|\nu_n(\sqrt{x})\nu(\sqrt{x})\right| \leq n2^a K_2 A_0 (2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \log^{-a} x\,.$$

L'inégalité fondamentale au rang $n+1$ résulte donc de:

$$\begin{aligned} &n A_0 (L + A_1)^{n-1}(L + K_3 + K_4) + K_1 (L + K_3)^n \\ &\qquad + nK_1K_4(L + K_3)^{n-1} + 2^a K_2 A_0 n (L + K_3)^{n-1} \leq (n+1)A_0(L + A_1)^n\,, \end{aligned}$$

où $L := 2\log\log 3x$, et cela est vrai, vu les définitions de A_0 et A_1.

En conclusion,

$$d\Pi = d\tau + (\log c)\delta + t d\nu$$

donc

$$dN = e^{d\Pi} = ce^{d\tau} * (te^{d\nu}) = c(\delta + dt) * (te^{d\nu})$$

d'où

$$\begin{aligned} N(x) &= c\int_1^x \Big(\int_1^{x/u} \delta + dt\Big) u e^{d\nu} \\ &= cx\int_1^x e^{d\nu} = cx + cx\sum_{n\geq 1} \frac{\nu_n(x)}{n!}\,. \end{aligned}$$

L'inégalité fondamentale permet de majorer la dernière somme:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\nu_n(x)}{n!} \leq A_0 \log^{-a} x \sum_{n\geq 1} \frac{(2\log\log 3x + A_1)^{n-1}}{(n-1)!} = A_0 e^{A_1} (\log 3x)^2 \log^{-a} x\,,$$

d'où le résultat.

4. Une application

Dans ce paragraphe, nous proposons une variation sur un thème abordé dans [2] à propos de la fonction d'Euler.

THÉORÈME 9. *Soit* $\boldsymbol{\beta}$ *une suite de nombres premiers généralisés telle que* β_n *diffère du n-ème nombre premier usuel* p_n *par une quantité* $O(n^a)$, *où* $0 \leq a < 1$. *On a alors, pour tout* c *fixé,* $c < \sqrt{2(1-a)}$,

$$\varepsilon(x) \ll \mathcal{L}(x)^{-c}\,,$$

pour $x \geq 3$, *où* $\mathcal{L}(x) := e^{\sqrt{\log x \log\log x}}$.

Observons que le résultat pour $a = 0$ découle du cas $a > 0$; nous supposons donc $a > 0$ dans la suite. Dans le cas particulier où la différence $\beta_n - p_n$ est constante, la méthode de [3] donne un meilleur résultat, comparable à l'estimation de Korobov et Vinogradov du terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers.

La démonstration du théorème repose sur les lemmes suivants.

LEMME 4. *Sous l'hypothèse du théorème 9 et en notant* Π_1 *et* Π_2 *les fonctions associées respectivement aux suites* (p_n) *et* (β_n) *comme dans la proposition 4, nous avons :*

$$\int_1^x \frac{d(\Pi_2 - \Pi_1)(t)}{t} = \log D + O(x^{a-1})$$

où

$$D = \prod_{n \geq 1} \frac{1 - 1/p_n}{1 - 1/\beta_n}.$$

Démonstration. Soit K un nombre entier fixé, supérieur à $1/a$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{d(\Pi_2 - \Pi_1)(t)}{t} &= \sum_{\beta_n^k \leq x} \frac{1}{k\beta_n^k} - \sum_{p_n^k \leq x} \frac{1}{kp_n^k} \\ &= \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k} \Delta_k(x^{1/k}) + \sum_{n \geq 1,\, k \geq K} \frac{\beta_n^{-k} - p_n^{-k}}{k} \\ &\qquad + O\Big(\sum_{k \geq K,\, \beta_n^k > x} \frac{1}{k\beta_n^k}\Big) + O\Big(\sum_{k \geq K,\, p_n^k > x} \frac{1}{kp_n^k}\Big)\end{aligned}$$

où

$$\Delta_k(t) := \sum_{\beta_n \leq t} \frac{1}{\beta_n^k} - \sum_{p_n \leq t} \frac{1}{p_n^k}.$$

La majoration de Tchebycheff pour la fonction de comptage des nombres premiers nous donne :

$$\sum_{k \geq K,\, p_n^k \leq x} \frac{1}{k} \ll \sum_{K \leq k \leq \log x/\log 2} \frac{1}{k} \frac{x^{1/k}}{\log(x^{1/k})} \ll x^{1/K}$$

et de même,

$$\sum_{k \geq K,\, \beta_n^k \leq x} \frac{1}{k} \ll x^{1/K}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k\geq K,\beta_n^k>x}\frac{1}{k\beta_n^k}+\sum_{k\geq K,p_n^k>x}\frac{1}{kp_n^k}\ll\int_x^{+\infty}t^{\frac{1}{K}-2}dt\ll x^{\frac{1}{K}-1}\ll x^{a-1}\,.$$

Maintenant,

$$\Delta_k(t)=\sum_{p_n\leq t}(\beta_n^{-k}-p_n^{-k})+O(E_k(t))$$

où

$$E_k(t):=\sum_{p_n\leq t,\beta_n>t}\beta_n^{-k}+\sum_{p_n>t,\beta_n\leq t}\beta_n^{-k}\,.$$

Comme $p_n-\beta_n=O(n^a)$, et $p_n\sim n\log n$, on a, pour une constante positive convenable H et pour tout k fixé:

$$E_k(t)\ll\sum_{|p_n-t|\leq Ht^a}t^{-k}\ll\frac{t^{a-k}}{\log t}$$

d'après l'inégalité de Brun-Titchmarsh. Il en résulte que

$$\sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{k}E_k(x^{1/k})\ll x^{a-1}\,.$$

Comme d'autre part,

$$\sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{k}\sum_{p_n\leq x^{1/k}}(\beta_n^{-k}-p_n^{-k})=\sum_{n\geq 1,1\leq k<K}\frac{\beta_n^{-k}-p_n^{-k}}{k}-\sum_{1\leq k<K}\sum_{p_n^k>x}\frac{\beta_n^{-k}-p_n^{-k}}{k}\,,$$

il suffit pour conclure de vérifier que pour chaque k fixé, on a:

$$\sum_{p_n>x^{1/k}}\left|\beta_n^{-k}-p_n^{-k}\right|\ll x^{a-1}\,.$$

Or $\left|\beta_n^{-k}-p_n^{-k}\right|\ll n^a p_n^{-k-1}$ donc

$$\sum_{p_n>t}\left|\beta_n^{-k}-p_n^{-k}\right|\ll\int_t^{+\infty}u^{a-k-1}du\ll t^{a-k}$$

d'où le résultat. $\square$

LEMME 5. *Soit $d\alpha$ une mesure et b un nombre réel positif tels que*

(i) $\|d\alpha\|_x \ll \log\log 3x, \quad x \geq 1$;

(ii) $\alpha(x) \ll x^{-b}, \quad x \geq 1$.

Soit $d\beta = e^{d\alpha}$, $d\gamma(t) = td\beta(t)$ et $d\mu = dN_1 * d\gamma$, où $N_1(t) = \lfloor t \rfloor$. Alors, pour toute constante $c < \sqrt{2b}$, on a :

(iii) $\beta(x) = 1 + O(\mathcal{L}(x)^{-c}), \quad x \geq 3$;

(iv) $\gamma(x) \ll x\mathcal{L}(x)^{-c}, \quad x \geq 3$;

(v) $\mu(x) = x + O(\mathcal{L}(x)^{-c}), \quad x \geq 3$.

Démonstration. Le lemme 2 s'applique avec :

$$A(x) = M_1 \log\log 3x\,, \qquad B(x) = M_2\,, \qquad C(u) = e^{-bu}\,,$$

où M_1 et M_2 sont des constantes positives. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \int_1^x \sum_{n\geq 0} \frac{(d\alpha)^{*n}}{n!} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n(x)}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n\leq K} + \sum_{n>K},\end{aligned}$$

où K est un paramètre, choisi ultérieurement.

Nous avons pour $n \geq 1$,

$$\frac{|\alpha_n(x)|}{n!} \ll \frac{(M_1 \log\log 3x + O(1))^{n-1}}{(n-1)!} e^{-b\frac{\log x}{n}}\,.$$

La formule de Stirling et un calcul facile montrent que cette dernière quantité est maximale pour

$$n = \sqrt{(2b + o(1))\frac{\log x}{\log\log x}}$$

et est donc, pour tout $n \geq 1$:

$$\ll \mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b}+o(1)}\,.$$

Si nous choisissons $K = \log x$, par exemple, cette dernière estimation se transmet à $\sum_{n\leq K}$. Quant au reste, il est

$$\ll \sum_{n>\log x} \frac{(M_1 \log\log 3x + O(1))^{n-1}}{(n-1)!} \ll \exp\left(-(1+o(1))\log x \log\log x\right)$$

donc négligeable : l'assertion (iii) est démontrée.

L'assertion (iv) résulte d'une simple intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^x t d\beta(t) &= x\beta(x) - \int_1^x \beta(t)dt \\ &\ll x\mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b}+o(1)} + \int_1^x \mathcal{L}(t)^{-\sqrt{2b}+o(1)}dt \\ &\ll x\mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b}+o(1)} .\end{aligned}$$

Pour démontrer l'assertion (v) nous employons de nouveau la méthode de l'hyperbole :

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \int_1^y \gamma\left(\frac{x}{t}\right)dN_1(t) + \int_1^{x/y} N_1\left(\frac{x}{t}\right)d\gamma(t) - N_1(y)\gamma\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \sum_{n\le y}\gamma\left(\frac{x}{n}\right) + x\beta\left(\frac{x}{y}\right) + O(\|d\gamma\|_{x/y}) + O\left(x\mathcal{L}(x/y)^{-\sqrt{2b}+o(1)}\right)\end{aligned}$$

d'après (iv) et l'égalité

$$N_1\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t} + O(1) .$$

Or

$$\|d\gamma\|_z = \int_1^z |t d\beta(t)| = \int_1^z t|d\beta|(t) \le z\|d\beta\|_z \le ze^{\|d\alpha\|_z} \le z(\log 3z)^{M_1} ,$$

pour $z \ge 1$. Par suite, en utilisant (iii) et (iv),

$$\mu(x) = x + O(x(\log y)\mathcal{L}(x/y)^{-\sqrt{2b}+o(1)}) + O(x(\log 3x)^{M_1}/y) .$$

En choisissant $y = x^\varepsilon$ avec ε positif assez petit, on obtient l'assertion (v). □

Nous pouvons maintenant achever de démontrer le théorème 9. Soit N_2 la fonction de comptage des nombres entiers généralisés engendrés par la suite $\boldsymbol{\beta}$. En utilisant les notations des lemmes 4 et 5, posons :

$$\begin{aligned}d(\Pi_2 - \Pi_1) &= (\log D)\delta + d\lambda , \\ d\alpha(t) &= \frac{d\lambda(t)}{t} ,\end{aligned}$$

de sorte que, d'une part,

$$\begin{aligned}\|d\alpha\|_x &\le \int_1^x \frac{1}{t}(|\log D|\delta + d\Pi_2 + d\Pi_1)(t) \\ &\le 2\log\log(3x) + O(1) ,\end{aligned}$$

et d'autre part (lemme 4),

$$\alpha(x) \ll x^{a-1}.$$

Or,

$$dN_2 = e^{d\Pi_2} = e^{d\Pi_1} * e^{d\Pi_2 - d\Pi_1} = dN_1 * e^{(\log D)\delta + d\lambda} = DdN_1 * d\gamma$$

où $d\gamma(t) = te^{d\alpha}(t)$. Le théorème résulte donc de l'assertion (v) du lemme 5.

REMERCIEMENTS

Je remercie: Gautami Bhowmik et Olivier Ramaré pour avoir suscité l'écriture de ce texte en m'invitant à participer au colloque de décembre 1997 à Lille, "Fonctions zêta et énumération"; Harold Diamond pour d'intéressantes suggestions et indications, notamment concernant le théorème 6; et Éric Saias pour d'utiles remarques.

RÉFÉRENCES

[1] BALANZARIO, E. P. On Beurling's theory of generalized primes. Ph. D. thesis, Univ. of Illinois, Urbana-Champaign, 1997.

[2] BALAZARD, M. Une remarque sur la fonction d'Euler. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 47* (1998), 325–330.

[3] BALAZARD, M. et G. TENENBAUM. Sur la répartition des valeurs de la fonction d'Euler. *Compositio Math. 110* (1998), 239–250.

[4] BATEMAN, P. T. et H. G. DIAMOND. Asymptotic distribution of Beurling's generalized prime numbers. In: *Studies in Number Theory* (W. J. LeVeque, editor), *MAA Studies in Mathematics 6* (1969), 152–210.

[5] BEURLING, A. Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés, I. *Acta Math. 68* (1937), 255–291.

[6] DIAMOND, H. G. Characterization of derivations on an algebra of measures, II. *Math. Z. 105* (1968), 301–306.

[7] —— Asymptotic distribution of Beurling's generalized integers. *Illinois J. Math. 14* (1970), 12–28.

[8] —— When do Beurling generalized integers have a density? *J. reine angew. Math. 295* (1977), 22–39.

[9] LEJEUNE DIRICHLET, G. Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie. In: *Mathematische Werke, vol. 2*, 49–66. Berlin, 1897. (Reprinted by Chelsea Publ. Co.)

[10] HALL, R. S. The prime number theorem for generalized primes. *J. Number Theory 4* (1972), 313–320.