

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 44 (1998)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE  
**Autor:** Colin de Verdière, Yves  
**Kapitel:** 4.3 EDP LINÉAIRES AVEC UN PETIT PARAMÈTRE  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63894>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 4.3 EDP LINÉAIRES AVEC UN PETIT PARAMÈTRE

En général, on étudiera une équation du type :

$$P(h, x, \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha(x, h) \left( \frac{h}{i} \partial_x \right)^\alpha,$$

où les  $a_\alpha(x, h)$  sont de la forme :

$$a_\alpha(x, h) = \sum_{j \geq 0} b_{\alpha j}(x) h^j.$$

On définit alors

$$P_0(x, \xi) = \sum b_{\alpha, 0} \xi^\alpha,$$

qui est appelé symbole principal de  $P$ . On supposera dans ce qui suit que  $P_0$  ne prend que des valeurs réelles.

Le but est de décrire les (des) solutions de

$$P_h u_h = O(h^\infty).$$

EXEMPLE 4.4.

$$P = -\frac{h^2}{2} \Delta + V - E, \quad P_0 = \frac{1}{2} \|\xi\|^2 + V(x) - E,$$

(valeurs propres de Schrödinger).

$$\frac{h}{i} \frac{du}{dt} = -\frac{h^2}{2} \Delta u + Vu, \quad P_0 = \tau - H(x, \xi),$$

(Schrödinger dépendant du temps).

$$\lambda^{-2} \Delta_g - 1, \quad P_0 = g^*(x, \xi) - 1,$$

(grandes valeurs propres du laplacien).

## LES SOLUTIONS BKW

On considère l'action de  $P$  sur une fonction oscillante et on développe en puissances de  $h$  :

$$P(a(x) e^{iS(x)/h}) = e^{iS(x)/h} \left( P_0(x, S'(x)) a(x) + \frac{h}{i} (\mathcal{X} a(x) + P_1(x, S'(x)) a(x)) + O(h^2) \right)$$

où  $\mathcal{X} = \sum \partial_{\xi_i} P_0(x, S'(x)) \partial_{x_i}$  et  $P_1(x, \xi)$ , le symbole sous-principal de  $P$ , est une fonction sur  $T^*X$ .

Résoudre  $P(ae^{iS/h}) = O(h^2)$  équivaut donc à résoudre l'équation eiconale  $P_0(x, S'(x)) = 0$ , puis une équation différentielle le long des trajectoires de  $\mathcal{X}$ . Ces deux opérations gardent un sens pour les solutions généralisées, en particulier,  $\mathcal{X}$  est la projection sur  $X$  de  $\mathcal{X}_{P_0}$  et donc on peut lire les équations de transport sur la variété lagrangienne.

Dans le cas de Schrödinger, l'équation de transport s'écrit :

$$\mathcal{X}a + \frac{1}{2}\Delta S a = 0.$$

Elle s'interprète géométriquement comme l'invariance par le flot hamiltonien de la demi-densité  $a(x)|dx|^{1/2}$ . Le carré  $a(x)^2|dx|$  s'interprète bien en mécanique quantique comme une mesure : la probabilité de présence de la particule.

Pour mettre tout cela en place, on associe, à la représentation de  $L$  à partir d'une famille de fonctions, des superpositions de fonctions oscillantes

$$f(x) = \int e^{i\varphi(x,\theta)/h} a(x,\theta) d\theta.$$

EXEMPLE 4.5 (LA FONCTION DE AIRY). On définit

$$Ai_h(x) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}} e^{i(x\xi - \frac{\xi^3}{3})/h} d\xi = h^{-1/6} Ai(xh^{-2/3}).$$

Cette fonction est associée à la variété lagrangienne

$$x = \xi^2$$

qui admet une caustique en  $(0,0)$ .

La fonction de Airy décrit en fait le comportement universel des intégrales oscillantes associées aux singularités plis.

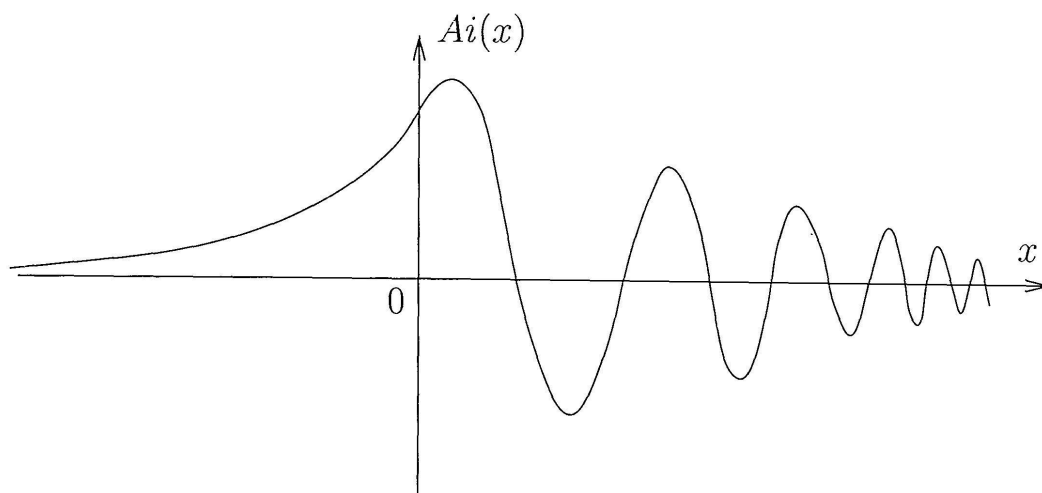


FIGURE 6  
La fonction de Airy

Le résultat net est la possibilité d'associer à toute variété lagrangienne  $L$  vérifiant  $(P_0)|_L = 0$  des solutions locales de  $Pu = O(h^2)$  et même  $O(h^\infty)$  si on réfléchit un peu.

Ces solutions ne se globalisent pas toujours: ce sont les conditions de quantification.

Dans les cas les plus simples, par exemple dans les exemples 4.6 et 4.7, il s'agit d'une condition portant uniquement sur  $L$ : la classe de cohomologie de de Rham de la forme de Liouville  $\alpha = \xi dx$  satisfait des conditions d'intégralité du type

$$[\alpha] \in 2\pi h(\mathbf{Z}^n + \mu),$$

où  $\mu \in \frac{1}{4}\mathbf{Z}^n$  est l'indice de Maslov.

En effet, une fois l'existence d'une densité invariante assurée, il reste le problème des phases qui sont données localement par  $S$  dont la différentielle est la restriction à  $L$  de  $\alpha$  (on retrouve la définition des fronts d'ondes comme feuilles de phases constantes). La contribution des caustiques est donnée par l'indice de Maslov qui a son origine technique dans la phase stationnaire.

EXEMPLE 4.6 (LES SÉRIES DE FOURIER). On considère l'opérateur  $\frac{h}{i}\partial_x$  sur  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ . Son symbole principal est  $\xi$  et la condition de quantification sur la variété  $\xi = a$  est

$$2\pi a = 2\pi h n,$$

soit  $a = hn$ . On retrouve comme spectre les  $hn$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  et les séries de Fourier.

EXEMPLE 4.7 (L'OSCILLATEUR HARMONIQUE).

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2).$$

Le symbole principal est

$$\frac{1}{2}(x^2 + \xi^2)$$

et les conditions de quantification s'écrivent pour la variété  $H = E$ :

$$2\pi E = 2\pi h(n + \frac{1}{2}).$$

Elles donnent le spectre exact:

$$E_n = h(n + \frac{1}{2}).$$

Cela n'est pas surprenant, car le changement  $x = \sqrt{h}x_1$  transforme  $\hat{H}_h$  en  $h\hat{H}_1$ .

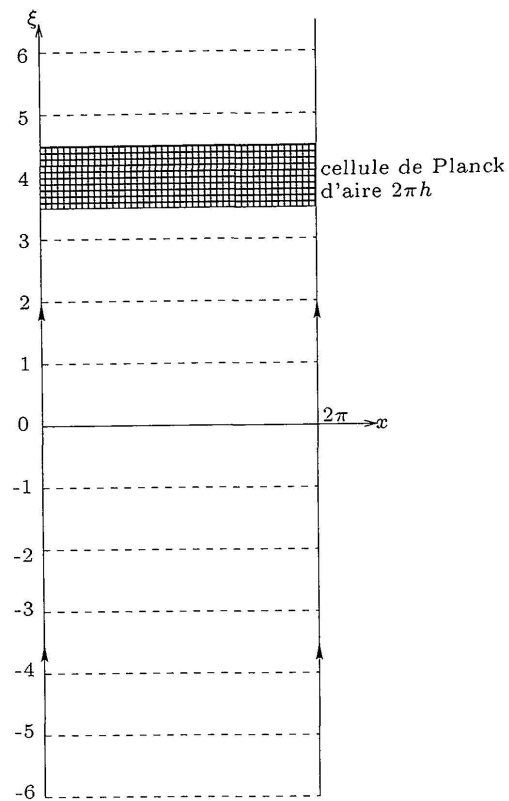


FIGURE 7

L'espace de phase des séries de Fourier

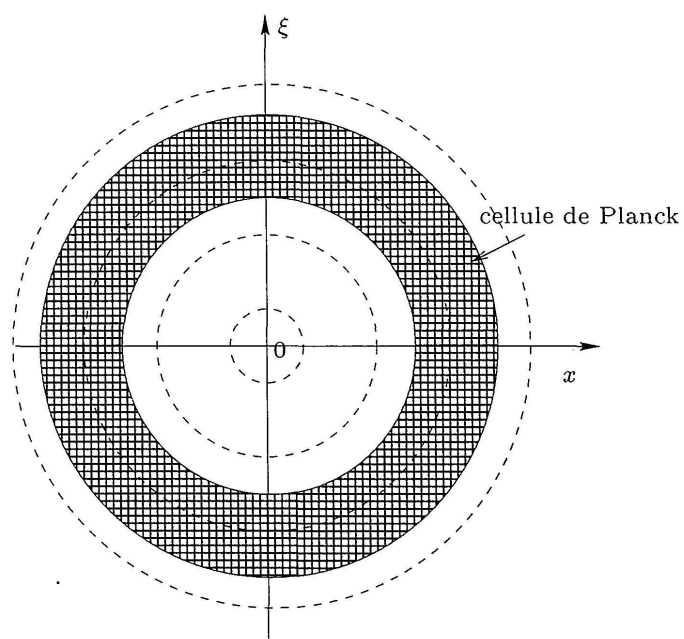


FIGURE 8

L'espace des phases de l'oscillateur harmonique