DÉMONSTRATIONS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Si l'on retire la condition d'uniformité de la définition d'un homéomorphisme simple, la dynamique peut devenir beaucoup plus complexe. Nous montrerons :

THÉORÈME 2. *Soit v un point de C. Il existe une infinité non dénombrable d'homéomorphismes $f\colon C \to C$, deux à deux non conjugués, tels que*

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = \lim_{n\to+\infty} f^{-n}(x) = v$$

pour tout $x \in C$.

DÉMONSTRATIONS

Rappelons que l'ensemble de Cantor C est caractérisé à homéomorphisme près comme étant compact, métrisable, parfait, totalement discontinu (voir par exemple [5]). En particulier toute partie non vide, ouverte et fermée de C est homéomorphe à C. Tout point de C possède un système fondamental de voisinages ouverts et fermés. Si X est localement compact mais pas compact, on notera $\widehat{X} = X \cup \{\text{point}\}$ son compactifié d'Alexandrov.

Soit $f\colon C \to C$ un homéomorphisme simple. La fonction $f^\infty = \lim_{n\to+\infty} f^n$ existe, et est continue sur $C \setminus F$. Elle prend bien sûr ses valeurs dans F. Montrons que f^{-1} est simple. Soit K un compact de $C\setminus F$. Soit V un voisinage ouvert de F, disjoint de K. Pour n grand on a $f^n(C \setminus V) \subset V$, d'où $C \setminus V \subset f^{-n}(V)$ et $f^{-n}(C \setminus V) \subset V$. On en déduit $f^{-n}(K) \subset f^{-n}(C \setminus V) \subset V$. Donc f^{-n} converge uniformément sur K, et f^{-1} est simple.

En considérant f^∞ et $f^{-\infty}$, on associe alors à f un graphe Γ comme indiqué dans l'introduction. Il possède évidemment les propriétés (1) et (2) du théorème 1. La propriété (3) sera établie un peu plus tard.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Elle se décompose en deux parties : surjectivité et injectivité.

Surjectivité. Étant donné un graphe Γ possédant les trois propriétés mentionnées dans le théorème, nous allons construire un homéomorphisme simple f_0 tel que $\Gamma(f_0)$ soit isomorphe à Γ. Nous commençons par trois cas élémentaires.

1. Si Γ est une boucle (un seul sommet, une seule arête), considérons le décalage $\sigma\colon (k,n) \mapsto (k, n+1)$ sur $X = K \times \mathbf{Z}$, où K est un ensemble de

Cantor. La caractérisation rappelée ci-dessus assure que $\widehat{X}$ est un ensemble de Cantor. Le prolongement f_0 de σ à $\widehat{X}$ est simple, et $\Gamma(f_0) = \Gamma$.

2. Si Γ est un segment (une seule arête, à extrémités distinctes), on considère encore le décalage sur $X = K \times \mathbf{Z}$, mais on compactifie X en lui ajoutant deux points à l'infini, avec comme systèmes fondamentaux de voisinages $K \times [n, +\infty[$ et $K \times]-\infty, -n]$ respectivement.

3. Si Γ se compose d'un sommet et de deux boucles attachées à ce sommet, on considère le compactifié d'Alexandrov de $(K \setminus \{\text{point}\}) \times \mathbf{Z}$ muni du décalage.

Le cas général s'obtient en combinant ces trois modèles. On part d'un nombre fini de points, identifiés aux sommets de Γ. Pour chaque arête orientée $v_1 v_2$, avec $v_1 \neq v_2$, on attache un modèle de type 2 en identifiant la source avec v_1 et le puits avec v_2. A chaque sommet v on attache un modèle de type 1 (resp. 3) s'il y a dans Γ une (resp. deux) boucles en v, en identifiant l'unique point fixe avec v. La propriété (3) du théorème 1 garantit que l'on obtient un espace de Cantor. Celui-ci est muni d'un homéomorphisme simple f_0 vérifiant $\Gamma(f_0) = \Gamma$.

Injectivité. Soit f un homéomorphisme simple. Pour $v \in F$, soit

$$A(v) = \{x \notin F \mid f^{-\infty}(x) = f^{\infty}(x) = v\}.$$

Pour $v_1 \neq v_2$, soit

$$A(v_1, v_2) = \{x \notin F \mid f^{-\infty}(x) = v_1,\ f^{\infty}(x) = v_2\}.$$

Les $A(v)$ et $A(v_1, v_2)$ qui ne sont pas vides forment une partition de $C \setminus F$ en sous-espaces f-invariants ouverts et fermés, dont nous déterminons maintenant l'adhérence dans C.

LEMME. *Si $A(v) \neq \varnothing$, on a $\overline{A(v)} = A(v) \cup \{v\}$. De même, si $A(v_1, v_2) \neq \varnothing$, on a $\overline{A(v_1, v_2)} = A(v_1, v_2) \cup \{v_1, v_2\}$.*

Démonstration. Soit V un voisinage ouvert et fermé de v tel que $V \cap F = \{v\}$, et $W = \{x \in V \mid x \notin f(V)\}$. Toute orbite de $A(v)$ non entièrement contenue dans V rencontre W. La convergence de $f^{\pm n}$ vers $f^{\pm\infty}$ étant uniforme sur le compact W, il existe un entier N tel que

$$A(v) \subset V \cup \bigcup_{|n| \leq N} f^n(W).$$

On en déduit $\overline{A(v)} = A(v) \cup \{v\}$. La démonstration pour $A(v_1, v_2)$ est analogue, en considérant un voisinage de $\{v_1, v_2\}$ ne contenant pas d'autre point de F. $\square$

Il résulte de ce lemme que $\Gamma(f)$ possède la propriété (3) du théorème 1. En effet, un $w \in F$ n'appartenant à aucune arête n'appartiendrait à aucun $\overline{A(v)}$ ou $\overline{A(v_1, v_2)}$. C'est impossible puisque l'union des adhérences des $A(v)$ et des $A(v_1, v_2)$ est C tout entier.

Nous allons maintenant terminer la preuve du théorème 1 en montrant que, étant donné Γ, tout homéomorphisme simple f tel que $\Gamma(f)$ soit isomorphe à Γ est topologiquement conjugué au f_0 construit plus haut.

Le lemme permet de supposer que f_0 est l'un des trois modèles ci-dessus, la conjugaison cherchée pouvant être définie séparément sur chaque $\overline{A(v)}$ ou $\overline{A(v_1, v_2)}$.

Commençons par le cas où Γ est un segment. Appelons v_1 la source de f, et v_2 le puits. Soit V un voisinage ouvert et fermé de v_2 ne contenant pas v_1. Nous affirmons que l'ouvert $U = \bigcup_{n \geq 0} f^n(V)$ est aussi fermé. En effet, si $W = \{x \in f(V) \mid x \notin V\}$, on a

$$U = V \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(W),$$

et cette union est finie car f^n converge vers v_2 uniformément sur W.

Soit alors $\mathcal{K}$ le compact $U \setminus f(U)$. Il rencontre chaque orbite de $C \setminus F$ exactement une fois. Soit ρ un homéomorphisme de $\mathcal{K}$ sur le compact K utilisé pour construire f_0. On le prolonge en un homéomorphisme de $C \setminus F$ sur $K \times \mathbf{Z}$ en posant $\rho(f^n(k)) = (k, n)$ pour $k \in \mathcal{K}$, et il s'étend à C en une conjugaison de f à f_0.

Supposons maintenant que Γ a un seul sommet. Soit v l'unique point fixe de f. Notons que, pour tout voisinage ouvert V de v, les intersections avec $C \setminus V$ de $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(V)$ et $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V)$ sont des ouverts. En effet, si $Y \subset C \setminus V$ est un voisinage compact d'un point $x \neq v$, on a pour n assez grand $f^{-n}(Y) \subset V$ et $f^n(Y) \subset V$, et donc aussi $Y \subset f^n(V)$ et $Y \subset f^{-n}(V)$.

On suppose d'abord que Γ est une seule boucle, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de v ne contenant aucune orbite autre que $\{v\}$ en totalité. On choisit V ouvert et fermé, et on considère

$$\mathcal{K} = (C \setminus V) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(V).$$

Il est fermé, ouvert, et rencontre toute orbite autre que $\{v\}$ exactement une fois. Comme précédemment, tout homéomorphisme de $\mathcal{K}$ avec K s'étend en une conjugaison de f avec le f_0 du modèle 1.

Supposons enfin que f a un unique point fixe v et qu'il existe des orbites arbitrairement proches de v. Soit $V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_p \supset \ldots$ un système fondamental de voisinages ouverts et fermés de v, avec $V_0 = C$. Posons

$$\mathcal{Q}_p = (V_p \setminus V_{p+1}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(V_{p+1}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V_p)$$

pour $p \geq 0$, et $\mathcal{Q} = \cup \mathcal{Q}_p$. Chaque $\mathcal{Q}_p$ étant ouvert, fermé, et contenu dans V_p, l'ensemble $\mathcal{Q}$ est ouvert, et son adhérence est $\mathcal{Q} \cup \{v\}$. En particulier, $\mathcal{Q}$ est homéomorphe à un ensemble de Cantor privé d'un point. De plus $\mathcal{Q}$ rencontre chaque orbite autre que $\{v\}$ en exactement un point (si $x \neq v$, son orbite rencontre $\mathcal{Q}_p$, où p est le plus grand entier tel que l'orbite soit contenue dans V_p). Tout homéomorphisme de $\mathcal{Q}$ sur $K \setminus \{\text{point}\}$ s'étend alors en une conjugaison de f avec le f_0 du modèle 3. $\square$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE

Seule la première assertion demande une démonstration. Soit A un ensemble à n éléments. Il y a $p_n = 3^n 2^{n(n-1)}$ manières d'attacher des arêtes orientées aux éléments de A de façon que le graphe obtenu vérifie les conditions (1) et (2) du théorème 1. Presque tous ces graphes vérifient également la condition (3): le nombre de ceux qui ne la vérifient pas est majoré par np_{n-1}, qui est un $o(p_n)$. Pour estimer $N(n)$ nous devons compter les graphes à isomorphisme près, c'est à dire en faisant agir le groupe symétrique. Puisque $\log p_n \sim n^2 \log 2$ et $\log n! = o(n^2)$, on a bien $\log N(n) \sim n^2 \log 2$. $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Soit K un ensemble de Cantor, et $L = \widehat{K \times \mathbf{N}}$. Nous distinguons dans L le point à l'infini, noté ∞, et $L_0 = K \times \{0\}$. Soit σ le prolongement à L du décalage $(k, n) \mapsto (k, n+1)$, et σ^{-1} son inverse, défini sur $L \setminus L_0$.

Considérons maintenant $M = L \times \{-1, 1\} \times \mathbf{N}$. Notons $\widehat{M} = M \cup \{v\}$ son compactifié d'Alexandrov, $M^- = L \times \{-1\} \times \{0\}$, et $M^+ = L \times \{1\} \times \{0\}$. Nous définissons un homéomorphisme φ de $\widehat{M} \setminus M^+$ sur $\widehat{M} \setminus M^-$ par:

$$\begin{cases} \varphi(\ell, -1, n) = (\sigma^{-1}(\ell), -1, n+1) & \text{pour } \ell \in L \setminus L_0 \\ \varphi(\ell, -1, n) = (\ell, 1, n) & \text{pour } \ell \in L_0 \\ \varphi(\ell, 1, n) = (\sigma(\ell), 1, n-1) & \text{pour } n > 0 \\ \varphi(v) = v\,. \end{cases}$$

La dynamique de φ est analogue à celle d'un champ de vecteurs du plan dans un secteur d'une selle. Le point v est fixe. L'orbite positive de $(\infty, -1, 0)$ tend vers v, de même que l'orbite négative de $(\infty, 1, 0)$. Si $\ell \neq \infty$, l'orbite d'un point $(\ell, -1, 0) \in M^-$ aboutit à M^+, après un nombre d'itérations qui tend vers l'infini quand $\ell \to \infty$ dans L.

Soit maintenant $q \geq 1$ un entier. Soit P l'union disjointe de q exemplaires $\widehat{M}_1, \ldots, \widehat{M}_q$ de $\widehat{M}$, et de deux exemplaires L^-, L^+ de $\widehat{L \times \mathbf{N}}$. Notons que les sous-espaces M_i^-, M_i^+ de $\widehat{M}_i$, ainsi que $L \times \{0\} \subset L^-$ et $L \times \{0\} \subset L^+$, sont des exemplaires de L. Il existe donc des homéomorphismes canoniques entre ces espaces.

Nous définissons un homéomorphisme θ sur P de la manière suivante. Sur chaque exemplaire $\widehat{M}_i$, il est égal à φ en dehors de M_i^+. Sur M_i^+, pour $i < q$, il coïncide avec l'homéomorphisme naturel de M_i^+ sur M_{i+1}^-, et sur M_q^+ c'est l'homéomorphisme de M_q^+ avec $L \times \{0\} \subset L^+$. On définit θ sur L^+ comme le prolongement du décalage $(\ell, n) \mapsto (\ell, n+1)$ de $L \times \mathbf{N}$, sur $L^- \setminus (L \times \{0\})$ comme le prolongement de l'inverse du décalage, et enfin sur $L \times \{0\} \subset L^-$ comme l'homéomorphisme naturel de $L \times \{0\}$ avec M_1^-.

Les points fixes de θ sont une source v^- (le point à l'infini de L^-), un puits v^+ (le point à l'infini de L^+), et q "selles" $v_1, \ldots, v_q$ (une dans chaque $\widehat{M}_i$). Toutes les orbites infinies de θ vont de v^- à v^+, sauf $q+1$ orbites "singulières" qui vont respectivement de v^- à v_1, de v_i à v_{i+1} $(1 \leq i \leq q-1)$, et de v_q à v^+.

Ces $q+1$ orbites sont mutuellement contiguës, au sens suivant : nous disons que les orbites de deux points x, y sont *contiguës* s'il existe une suite $x_p \to x$, et des entiers n_p, avec $\theta^{n_p}(x_p) \to y$. Les autres orbites infinies de θ ne sont contiguës qu'à elles-mêmes. Les orbites singulières de θ sont en fait les points de non-séparation de l'espace des orbites infinies de θ.

Identifiant entre eux les $q+2$ points fixes de θ, nous obtenons pour chaque $q \geq 1$ un homéomorphisme f_q d'un ensemble de Cantor, possédant un unique point fixe v et vérifiant les conditions du théorème 2. Ces homéomorphismes ne sont pas conjugués entre eux : ils sont distingués par la contiguïté.

Pour obtenir une infinité non dénombrable, nous combinons les f_q. Soit Q une partie non vide de $\mathbf{N}$, avec $0 \notin Q$. Pour chaque $q \in Q$, soit C_q un ensemble de Cantor muni de l'homéomorphisme f_q. Notons c_q le point fixe de f_q. Considérons, sur le compactifié d'Alexandrov de l'union disjointe des $C_q \setminus \{c_q\}$, l'homéomorphisme f_Q qui coïncide avec f_q sur chaque $C_q \setminus \{c_q\}$. Il vérifie les conditions du théorème 2. Sur l'ensemble des orbites infinies de f_Q, la contiguïté est une relation d'équivalence. Il y a une classe d'équivalence à $q+1$ éléments pour chaque $q \in Q$, et les autres classes ont un seul élément. Donc f_Q n'est pas conjugué à $f_{Q'}$ si $Q \neq Q'$. $\square$