

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ORIGINES DU CALCUL SYMPLECTIQUE CHEZ LAGRANGE
Autor: IGLESIAS, Patrick
Kapitel: Introduction
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63904>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LES ORIGINES DU CALCUL SYMPLECTIQUE CHEZ LAGRANGE

par Patrick IGLESIAS

INTRODUCTION

Entre 1808 et 1811, Lagrange développe une *théorie de la variation des constantes* appliquée aux problèmes de la mécanique. C'est l'acte de naissance du calcul *symplectique*, terme qui ne sera inventé qu'en 1946 par Hermann Weyl¹). Le but qu'il poursuit à l'époque est la généralisation d'un théorème de Laplace, sur la stabilité séculaire du grand axe de l'orbite elliptique d'une planète, perturbée par l'attraction d'autres corps célestes.

Depuis Kepler on sait *résoudre* explicitement le problème des éphémérides des planètes. C'est-à-dire, calculer avec une précision aussi grande que l'on veut la position de la Terre (ou de toute autre planète) connaissant sa position et sa vitesse à un instant donné, à condition toutefois de considérer seulement l'attraction du Soleil et de négliger complètement l'influence des autres planètes. Mais bien que ce savoir soit important, il est largement insuffisant pour ce qui est du mouvement réel des planètes. L'influence des autres planètes sur la Terre est-elle vraiment négligeable, ne va-t-elle pas à terme déstabiliser notre trajectoire et nous expulser aux confins de l'espace ?

Il faut donc traiter le problème dans sa globalité : calculer la position d'une planète quelconque, connaissant les positions et vitesses de toutes les planètes, et ne négligeant l'influence d'aucune d'entre elles. La difficulté de cette question donne le vertige, et on ne sait y répondre, encore actuellement, ni analytiquement ni même numériquement.

On pourrait croire, en effet, qu'avec l'avènement de l'ordinateur cette question soit devenue académique : pourquoi ne pas intégrer naïvement les équations du mouvement par une méthode numérique quelconque. Malheureusement,

¹) Voir la note historique 2 à la fin de cette introduction.

si les erreurs d'approximations, inévitables dans ce genre de calcul, sont négligeables sur un bref intervalle de temps, elles deviennent catastrophiques à long terme. Cette incertitude sur la position de la planète n'a rien à voir avec une éventuelle situation chaotique du système (le système à deux corps est d'ailleurs parfaitement *intégrable* dans tous les sens raisonnables que l'on veut bien donner à ce mot), elle est simplement la conséquence de l'accumulation des erreurs commises par l'ordinateur lors de l'intégration numérique des équations du mouvement. L'existence d'une méthode analytique d'intégration du mouvement est donc capitale pour résoudre convenablement cette question. Si cette remarque est vraie pour le problème à deux corps, elle l'est *a fortiori* pour le problème à n corps (*i.e.* un nombre quelconque de planètes en interaction). Or, comme nous l'avons déjà dit, nous ne connaissons toujours aucune méthode analytique satisfaisante susceptible de résoudre cette question. Lagrange a contourné cette difficulté en appliquant de façon astucieuse sa méthode *de la variation des constantes* aux problèmes de la mécanique analytique. Décrivons rapidement ce dont il s'agit.

Considérons d'abord un corps matériel (une planète) attiré par un centre fixe (le Soleil) selon la loi de la gravitation universelle. Les équations différentielles qui décrivent son mouvement sont de degré deux dans l'espace à trois dimensions, il faudra donc six *constantes d'intégration*²⁾ pour le décrire. D'après Newton, nous savons que la trajectoire de ce corps est une ellipse³⁾, de foyer le centre d'attraction⁴⁾. Pour décrire complètement cette ellipse il nous faut d'abord connaître le plan dans lequel elle s'inscrit (le plan de l'orbite), on peut le repérer par le vecteur unitaire qui lui est orthogonal, ce qui fait deux paramètres. Pour définir l'ellipse dans son plan on peut choisir la position du deuxième foyer, ce qui donne deux nouveaux paramètres, et la longueur de l'ellipse⁵⁾, soit au total : cinq paramètres pour situer et décrire la trajectoire du corps dans l'espace.

Mais si ces cinq paramètres suffisent à définir complètement la trajectoire du corps céleste, ils ne suffisent pas à déterminer son *mouvement*. En effet,

²⁾ A cette époque on disait *constantes d'intégration* quand nous parlons aujourd'hui d'*espace de solutions*. Par exemple, l'équation différentielle ordinaire réelle $dx/dt = x$ a toutes ses solutions de la forme $x(t) = c \exp(t)$, où c est une constante arbitraire — la fameuse constante d'intégration. Or, c caractérise justement cette solution.

³⁾ Si Kepler a découvert le mouvement elliptique des planètes, c'est Newton qui l'a « déduit » de la loi de la gravitation universelle qui porte son nom. Pour une discussion plus approfondie sur ce sujet voir la thèse de F. de Gandt [dG87].

⁴⁾ Les caractéristiques géométriques de cette ellipse étant, par ailleurs, liées aux position et vitesse initiales du corps.

⁵⁾ Il est possible maintenant de tracer l'ellipse par la méthode du jardinier.

comment déterminer la position de la planète à chaque instant sur sa trajectoire si nous ne connaissons pas sa position à une origine des temps arbitraire ? ou encore la date de son passage à l'aphélie ? Voilà comment s'introduit ce sixième paramètre que les astronomes appellent l'*époque*.

Nous aurions pu tout aussi bien choisir six autres paramètres : par exemple les position et vitesse initiales de la planète à l'origine des temps. Ils définissent aussi, de façon unique, le mouvement de la planète. Seul le caractère pratique de tel ou tel ensemble de paramètres peut déterminer notre choix. Les astronomes appellent *éléments képlériens* de la planète un tel ensemble de six paramètres servant à caractériser son mouvement, cinq pour la figure de l'ellipse et l'époque.

L'ensemble des mouvements de la planète considérés indépendamment du choix des paramètres qui nous servent à les décrire⁶⁾ sera appelé *espace des mouvements képlériens*.

Supposons maintenant que la planète, qui suit un mouvement képlérien m , subisse un choc instantané dû à l'impact d'un astéroïde. Après le choc elle suivra encore un mouvement képlérien m' différent du précédent. Le mouvement (perturbé) de cette planète sera donc décrit par son mouvement m avant le choc, son mouvement m' après le choc et l'instant du choc t . Supposons ensuite que la planète subisse une série de chocs de ce type. Le mouvement réel de la planète sera décrit par une courbe dans l'espace des mouvements képlériens, discontinue et constante par morceaux, chaque morceau de courbe décrivant le mouvement képlérien de la planète entre deux chocs successifs. En étendant ce raisonnement, Lagrange assimilera l'interaction des autres planètes du système à une série infinie de chocs «infiniments petits et continuels». Il décrira ainsi le mouvement réel de la planète perturbée par une courbe, cette fois différentiable, tracée dans son espace des mouvements képlériens. C'est en précisant l'équation différentielle de cette courbe⁷⁾ qu'il fera apparaître la structure symplectique de l'*espace des mouvements*. Il donnera l'expression des composantes de la forme symplectique de l'espace des mouvements képlériens dans le système de coordonnées que sont les *éléments de la planète*. Il en déduira entre autre la stabilité séculaire du grand axe des planètes.

J'ai essayé, dans cet article, d'être le plus fidèle possible aux textes de Lagrange. Désirant par là mettre en évidence le processus qui lui a permis, en

⁶⁾ On dit que c'est une variété.

⁷⁾ Aujourd'hui cette équation porte le nom d'*équation de Hamilton*, mais pour la petite histoire sachez que Sir W.R. Hamilton avait juste six ans lorsque Lagrange la publia pour la première fois.

voulant résoudre le problème du système des planètes, d'élaborer les premiers éléments de calcul symplectique.

NOTE 1. C'est le 22 août 1808 que Lagrange présente à l'Institut de France son *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes* [Lag08] où sont définis pour la première fois les *crochets* et *parenthèses* qui portent son nom et qui sont, en termes modernes, les composantes de la *forme symplectique* de l'espace des mouvements d'une planète.

Ce mémoire sera suivi de celui *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires* [Lag09] présenté le 13 mars 1809, où il généralise sa méthode à tous les problèmes de mécanique. Il en donnera une version notablement simplifiée, et définitive, le 19 février 1810 [Lag10]. C'est à partir de cette version qu'il écrira les chapitres relatifs à ces questions dans la deuxième édition de son *Traité de Mécanique Analytique* [Lag11] (seconde partie, de la cinquième à la septième section). Ce volume ne sera publié qu'après sa mort.

NOTE 2. Dans son ouvrage sur *Les Groupes classiques* [Wey46], Hermann Weyl baptise ainsi: *groupe symplectique*, le groupe des transformations linéaires de \mathbf{R}^{2n} qui préservent la forme bilinéaire antisymétrique $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$. Les relations étroites entre la structure définie par ω et la structure complexe ($\mathbf{R}^{2n} \sim \mathbf{C}^n$) lui font choisir le mot *symplectique* [gr. συμ-πλεκτικός], transposition de *complexe* [lat. com-plexus] pour désigner ce groupe; le mot *complexe* étant par ailleurs réservé. Le suffixe πλεκτικός \sim *plexus* signifiant *tenir, entrelacer*... L'idée de *complexe*, comme *symplectique* sous-entend l'existence de plusieurs types d'objets (ici deux) maintenus ensemble dans une même structure. De façon rapide et en anticipant sur la suite, on peut dire que dans le premier cas la *complexité* représente la dualité *réel-imaginaire*, et dans le second la *symplecticité* représente la dualité *position-vitesse*. Voici ce qu'en dit lui-même Weyl [Wey46, p. 165]:

The name "complex group" formerly advocated by me in allusion to line complexes, as these are defined by the vanishing of antisymmetric bilinear forms, has become more and more embarrassing through collision with the word "complex" in the connotation of complex number. I therefore propose to replace it by the corresponding Greek adjective "symplectic". Dickson calls the group the "Abelian linear group" in homage to Abel who first studied it.

En ce qui concerne la notion actuelle de *géométrie symplectique*, au sens de l'étude des variétés différentielles munies d'une forme symplectique, il semble que ce soit J.-M. Souriau qui l'ait introduite en 1953 dans son article

Géométrie symplectique différentielle. Applications. [Sou53] Dans un article plus récent du même auteur : *La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811* [Sou86], on peut lire un autre aspect des relations entre la géométrie symplectique et la mécanique de Lagrange.

1. GÉOMÉTRIE DES MOUVEMENTS D'UNE PLANÈTE AUTOUR D'UN CENTRE FIXE

Pour comprendre et apprécier la méthode de la variation des constantes développée par Lagrange, il est nécessaire de bien connaître la résolution du problème à deux corps. Nous allons en donner un bref résumé dans ce qui suit.

Depuis Newton on sait que les mouvements d'un point matériel (une planète) autour d'un centre fixe (le Soleil) est décrit par l'équation différentielle⁸⁾ suivante :

$$(1) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

où \mathbf{r} désigne un vecteur non nul de l'espace \mathbf{R}^3 et r son module. Transformons cette équation différentielle en un système du premier ordre dans $[\mathbf{R}^3 - \{0\}] \times \mathbf{R}^3$, les *mouvements* de la planète deviennent les solutions de :

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Comme on le sait⁹⁾, l'énergie totale du système est conservée le long du mouvement. Les astronomes appellent *constante des forces vives* le double de l'énergie, on la notera f :

$$(3) \quad f = v^2 - \frac{2}{r}.$$

D'autre part, comme la force d'attraction gravitationnelle est centrale, le moment cinétique \mathbf{L} est lui aussi conservé :

$$(4) \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}.$$

⁸⁾ Il faudrait en toute rigueur multiplier \mathbf{r} par la constante d'attraction solaire, mais nous choisirons les unités de telle sorte qu'elle soit égale à 1.

⁹⁾ depuis Huygens, dans son *Horlogium oscillatorium* de 1673.