

7.4. Le cas intégrable

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

En intégrant $\xi \rightarrow e^{(y-x)\xi}$ le long de γ_+ et de γ_- , on obtient :

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{d+} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy + \frac{1}{2i\pi} \int_{d-} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy.$$

Si C_R désigne le lacet représenté sur la figure 4, on a d'après la formule de Cauchy :

$$a(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy.$$

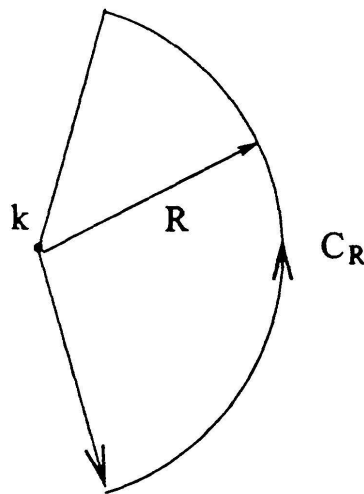


FIGURE 4

En faisant tendre R vers l'infini on voit que $\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = a(x)$ pour tout $x \in S$. $\square$

7.4. LE CAS INTÉGRABLE

Supposons que la fonction a appartienne à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(V_\beta)^{\exp(r)}$ ($r \geq 0$) où V_β désigne l'ouvert

$$V_\beta := \{x \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \mid -\beta < \text{Arg}(x) < \beta\},$$

avec $\pi/2 < \beta < \pi$.

Reprenons les notations de la sous-section 7.2; en particulier $U_r(\theta)$ désigne le demi-plan

$$U_r(\theta) := \{\xi \in \mathbf{C} \mid \Re(e^{i\theta}\xi) < -r\}.$$

En adaptant les résultats de 7.2 on voit que le représentant $\mathcal{B}_k(a)$ de la transformée de Borel de a se prolonge analytiquement :

— sur l'ouvert

$$U_r^+ := \bigcup_{\theta \in [-\beta, 0]} U_r(\theta)$$

en une fonction notée $\mathcal{B}_k^+(a) \in \mathcal{O}(U_r^+)^{\exp(k)}$;

— sur l'ouvert

$$U_r^- := \bigcup_{\theta \in [0, \beta]} U_r(\theta)$$

en une fonction notée $\mathcal{B}_k^-(a) \in \mathcal{O}(U_r^-)^{\exp(k)}$ (voir figure 5).

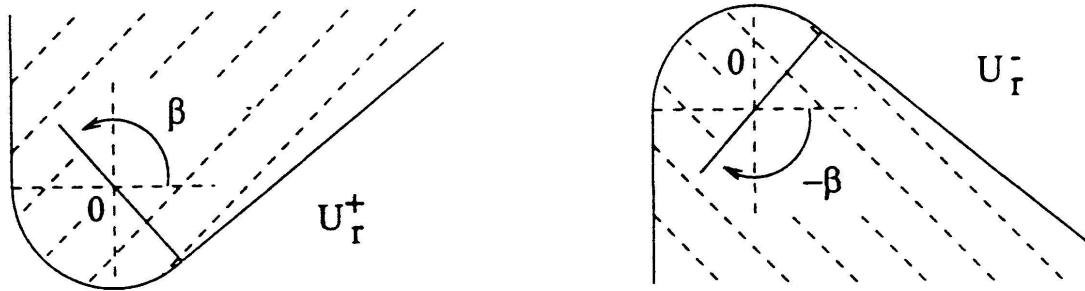


FIGURE 5

Faisons à présent l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 1. La fonction $\mathcal{B}_k^+(a)$ (resp. $\mathcal{B}_k^-(a)$) se prolonge analytiquement dans l'ouvert U_0^+ (resp. U_0^-).

Désignons alors par ${}^*U^\beta$ le voisinage sectoriel de l'infini défini par ${}^*U^\beta := U_0^+ \cap U_0^-$. Une application du théorème de Cauchy montre alors la proposition suivante.

PROPOSITION 7.1. Sous les hypothèses précédentes, la fonction $\widehat{a}$, appelée le mineur de a , définie pour $\xi \in {}^*U^\beta$ par : $\widehat{a}(\xi) = \mathcal{B}_k^+(a)(\xi) - \mathcal{B}_k^-(a)(\xi)$, ne dépend pas de k et on a :

$$\widehat{a}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{x\xi} a(x) dx,$$

où Γ est le chemin représenté sur la figure 6. De plus, $\widehat{a} \in \mathcal{O}({}^*U^\beta)^{\exp(0)}$.

Le fait que $\widehat{a}$ appartienne à l'espace vectoriel $\mathcal{O}({}^*U^\beta)^{\exp(0)}$ est une conséquence directe des propriétés de croissance à l'infini de $\mathcal{B}_k^+(a)$ et $\mathcal{B}_k^-(a)$ en faisant tendre k vers zéro.

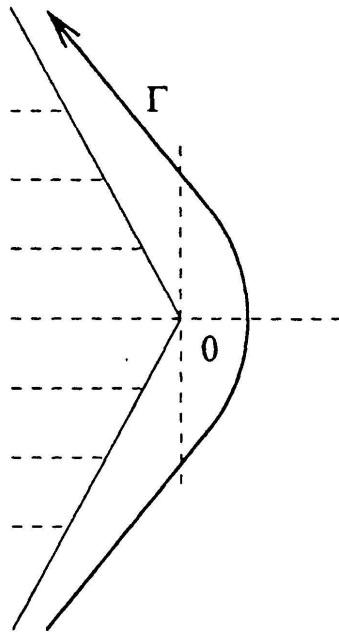


FIGURE 6

PROPOSITION 7.2. Si la fonction a possède un développement $a(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{x^n}$ convergent à l'infini, alors la fonction $\hat{a}$ est entière et $\hat{a}(\xi) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}$.

Démonstration. Le développement $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{x^n}$ est uniformément convergent pour $|x| > R$. En prenant pour contour Γ un cercle de centre 0 et de rayon $R' > R$, on a :

$$\hat{a}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{x\xi} \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \geq 1} a_n \int_{\Gamma} e^{-x\xi} \frac{1}{x^n} dx,$$

ce qui fournit l'expression désirée par un simple calcul de résidus. $\square$

Ajoutons à présent l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 2. L'origine est une singularité intégrable de $B(a)$.

Nous pouvons écrire sous ces conditions l'égalité :

$$\int_{\gamma} e^{-x\xi} B(a)(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \hat{a}(\xi) d\xi,$$

de sorte que le résultat qui suit est un simple corollaire du théorème 2.

COROLLAIRE 7.1. *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$a(x) = \int_0^\infty e^{-x\xi} \widehat{a}(\xi) d\xi$$

pour tout x dans l'ouvert V_β , où la fonction analytique $\widehat{a}$ désigne le mineur de a .

7.5. QUELQUES PROPRIÉTÉS

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème 2.

PROPOSITION 7.3. *L'opérateur de dérivation ∂ se transforme par $\mathcal{B}$ en l'opérateur de multiplication par $-\xi$,*

$$\text{Dérivation} \quad \frac{\partial}{\partial x} \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{B}}{\rightleftharpoons}} \text{multiplication par } (-\xi),$$

tandis que l'opérateur de translation E^ω de vecteur $\omega > 0$ se transforme par $\mathcal{B}$ en l'opérateur de multiplication par $e^{-\omega\xi}$,

$$\text{Translation} \quad E^\omega \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{B}}{\rightleftharpoons}} \text{multiplication par } (e^{-\omega\xi}).$$

RÉFÉRENCES

- [AV] APOSTOL, T. M. and T. H. VU. Dirichlet series related to the Riemann zeta function. *Journal of Number Theory* 19 (1984), 85–102.
- [B1] BERNDT, B. C. *Ramanujan's Notebooks*, Part I. Springer Verlag, New York, 1985.
- [B2] ——— *Ramanujan's Notebooks*, Part II. Springer Verlag, New York, 1989.
- [Bo] BOAS, R. P. *Entire Functions*. Academic Press, New York, 1954.
- [BB] BORWEIN, D., P. BORWEIN and R. GIRGENSOHN. Explicit evaluation of Euler sums. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 38 (1995), 277–294.
- [C] CARTIER, P. An introduction to zeta functions, in *From Number Theory to Physics*. Springer Verlag, Berlin, 1992.