

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DE KATO POUR LES ANNEAUX LOCAUX DE DIMENSION 2
Autor: Szamuely, Tamás
Kapitel: 4. RÉDUCTIONS
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63273>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

4. RÉDUCTIONS

Le reste de l'article est consacré à la démonstration du théorème 2. Gardons les notations du chapitre 1. Tout d'abord, *on va vérifier que $\omega_p = 0$ pour presque tous les p de hauteur 1.*

Soit X le sous-schéma ouvert de $\text{Spec} A$ obtenu en enlevant le point fermé. La suite de localisation en cohomologie étale (cf. Milne [11], Chap. III, Prop. 1.25) nous fournit par functorialité le diagramme commutatif

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array}$$

Ici la flèche verticale à droite est un isomorphisme par excision (Milne [11], Chap. III, Cor. 1.28). Quant à la flèche horizontale en bas, en continuant la suite de localisation on obtient la suite exacte

$$H^3(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}).$$

Mais les termes aux deux extrémités sont nuls car A_p^h étant hensélien, sa cohomologie est la même que celle de son corps résiduel $\kappa(p)$ (cf. Artin [2], Chap. III., Thm. 4.9), ce qui est un corps de dimension cohomologique 2, on l'a vu. Ceci démontre le second isomorphisme.

Soit maintenant S un ensemble fini de points fermés de X , et considérons la suite de localisation

$$H^3(X - S, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H_S^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}).$$

Ici, on a $H_S^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{p \in S} H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2})$, donc par passage à la limite sur les S (ce qui est permis dans notre cas par Milne [11], Chap. III, Lemma 1.16), on a la suite exacte

$$(4.2) \quad H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_p H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}).$$

En particulier, l'image d'un élément $\omega \in H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$ par un homomorphisme $H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2})$ est nulle pour presque tout p . Mais par (4.1), cette image n'est autre que la restriction $\omega_p \in H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2})$, et on obtient le résultat.

Ensuite, on va utiliser le théorème de Cohen pour montrer le

LEMME 4.3. Dans l'énoncé du théorème 2, on peut supposer $A = O_k[[T]]$.

Démonstration. Soit A comme au th. 2, et notons par \tilde{K} le corps de fractions d'un anneau de la forme $O_k[[T]]$ sur lequel A est fini selon Cohen. Alors pour tout idéal premier $\tilde{\mathfrak{p}}$ de hauteur 1 de $O_k[[T]]$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}|\tilde{\mathfrak{p}}} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \text{Cor} \downarrow & & \downarrow \Sigma \text{Cor} \\ H^3(\tilde{K}, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(\tilde{K}_{\tilde{\mathfrak{p}}}, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array}$$

En effet, il existe un tel diagramme pour tous les H^i ($i \geq 0$), et il suffit de vérifier la functorialité pour $i = 0$. On peut supposer de plus que l'extension $K | \tilde{K}$ est séparable et l'assertion est alors une conséquence du théorème sur les extensions de valuations (cf. Serre [16], chap. I, §2.3).

D'autre part, par le th. 1, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \\ \text{Cor} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ H^3(\tilde{K}_{\tilde{\mathfrak{p}}}, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \end{array}$$

dont la commutativité se vérifie de la même manière que l'énoncé analogue (cf. Serre, *loc. cit.*) pour le groupe de Brauer d'un corps local (de dimension 1). Ces deux diagrammes impliquent la réduction cherchée.

On suppose donc désormais $A = O_k[[T]]$.

CONVENTION. On va noter par A° le hensélisé de l'anneau $O_k[T]_{(\pi, T)}$, avec le même O_k que dans la définition de A . Son corps de fractions sera noté K° . Par contre, en général, nous continuerons de noter par B^h tout anneau qui est comme dans le lemme 3.2. Veuillez accepter toutes nos excuses pour cet inconvénient.

L'idée de la démonstration du théorème 2 est de comparer la suite d'homomorphismes figurant dans l'énoncé à un complexe auxiliaire en K -théorie de Milnor par le symbole cohomologique. Or l'image de $h_{m,K}^d$ est contenue dans $H^d(K, \mu_m^{\otimes d})$, donc pour pouvoir bénéficier de cet outil il faut remplacer $H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$ par exemple par $H^2(K, \mu_m^{\otimes 2})$. Comme \mathbf{F} est fini, la suite spectrale de Hochschild-Serre nous fournit un homomorphisme

$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(K^{hs}, \mu_m^{\otimes 2}))$, où K^{hs} est le corps de fractions du hensélisé strict A^{hs} . Mais cet homomorphisme n'est un isomorphisme que si K^{hs} est de p -dimension cohomologique 2 pour tout p divisant m , ce qui n'est pas clair. Par contre si l'on remplace A par A° , le corps de fractions K° du hensélisé strict le sera bien, étant un corps de degré de transcendance 1 sur un corps de dimension cohomologique 1 (cf. Serre [15], chap. 4.3, prop. 11). La réduction suivante est donc :

LEMME 4.4. *On peut remplacer A par A° dans l'énoncé du th. 2.*

Démonstration. La suite de localisation (4.2) nous fournit par functorialité le diagramme commutatif

$$(4.5) \quad \begin{array}{ccccc} H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{d^\circ} & \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{d} & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array}$$

où $X^\circ = \text{Spec } A^\circ - \{(\pi, T)\}$, et \mathfrak{p}° parcourt les points fermés de X° qui sont en bijection avec ceux de X selon le lemme 3.2. Tenant compte de l'identification (4.1), pour achever la réduction il suffit de montrer que l'homomorphisme vertical au milieu induit un isomorphisme $\text{Im } d^\circ \cong \text{Im } d$. Une chasse au diagramme montre alors que pour cela il suffit de voir deux choses :

- (1) Dans le diagramme (4.5), l'homomorphisme vertical à droite est injectif.
- (2) Pour tous les \mathfrak{p} et \mathfrak{p}° correspondants, l'homomorphisme naturel

$$H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme.

Pour prouver (1), on considère les isomorphismes

$$X \cong X^\circ \times_{\text{Spec } A^\circ} \text{Spec } A \cong \varprojlim (X^\circ \times_{\text{Spec } A^\circ} \text{Spec } R),$$

où la limite projective est prise suivant les $\text{Spec } R$, avec R un sous-anneau de A de type fini sur A° . Pour un tel anneau, le morphisme naturel $A^\circ \rightarrow R$ possède une section par le théorème d'approximation d'Artin [1], donc le morphisme $H^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(X^\circ \times_{\text{Spec } A^\circ} \text{Spec } R, \mu_m^{\otimes 2})$ a également une section et on obtient le résultat par passage à la limite (tenant de nouveau compte de [11], Chap. III, Lemma 1.16).

Pour (2), considérons le diagramme commutatif suivant, obtenu en superposant (4.1) et le diagramme analogue pour A° .

$$\begin{array}{ccc}
 H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H_{p^\circ}^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow h \\
 H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \searrow & \downarrow \cong \\
 & & H_{p^\circ}^4(\text{Spec}(A_{p^\circ}^\circ)^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \searrow & \downarrow g \\
 & & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \searrow & \downarrow \cong \\
 & & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2})
 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc}
 H^3(K_{p^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_{p^\circ}^4(\text{Spec}(A_{p^\circ}^\circ)^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 \downarrow f & & \downarrow \\
 H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2})
 \end{array}$

Notre tâche est de montrer que l'homomorphisme h du diagramme est un isomorphisme ce qui équivaut à dire que f l'est. Mais par le th. 1, les groupes $H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2})$ et $H^3(K_{p^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2})$ sont tous les deux isomorphes à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$; reste donc à voir que ces isomorphismes sont compatibles avec f . Par construction, l'isomorphisme du th. 1 est obtenu comme le composé de deux résidus pour la suite spectrale de Hochschild-Serre, donc la compatibilité en question est évidente par functorialité.

5. CONCLUSION

Comme promis, on va maintenant construire, suivant Kato, un complexe en K -théorie de Milnor que l'on va ensuite comparer à travers le symbole cohomologique avec le complexe hypothétique du th. 2.

Soit B^h un anneau comme dans le lemme 3.2, K^h son corps de fractions. On suppose que le corps résiduel de B^h est parfait. (En fait, des hypothèses plus faibles suffisent, cf. la Remarque ci-dessous.) Si \mathfrak{q} parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 de B^h , on définit le complexe

$$(\mathbf{M}) \quad K_2(K^h) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{\mathfrak{q}} K_1(\kappa(\mathfrak{q})) \xrightarrow{\beta} K_0(\mathbf{F}) \cong \mathbf{Z}$$

comme suit: l'homomorphisme α est somme directe des résidus de Milnor $\partial_{1,\mathfrak{q}}^M$ (cf. chap. 2) attachés aux valuations discrètes de K^h induites par les