

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN THÉORÈME DE RIGIDITÉ POUR LES SURFACES MINIMALES DE E^3
Autor: Burlet, Oscar / Haab, François
Kapitel: 2. RÉSULTATS
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61823>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Meeks et White ont introduit récemment la notion de *rigidité minimale*, rappelée plus bas [3]. Ces auteurs ont aussi établi des critères pour montrer que certaines surfaces sont minimalement rigides. Ainsi le caténoïde est une surface minimalement rigide, comme d'ailleurs toute surface minimale à deux bouts (voir plus bas ou voir [3]). Par contre toute surface minimale simplement connexe, dont la courbure de Gauss n'est pas identiquement nulle, n'est *pas* minimalement rigide (voir théorème 1). Si la courbure de Gauss d'une surface minimale complète est identiquement nulle, Osserman montre que cette surface est un plan, elle est donc minimalement rigide [10]. Cette rigidité minimale reste vraie pour une surface minimale connexe, avec courbure de Gauss nulle et qui n'est pas nécessairement complète. En effet, dans ce cas, la surface en question est un ouvert d'un plan et toute isométrie entre ouverts plans connexes est une congruence. Remarquons qu'un plan est minimalement rigide, sans être rigide (on peut le courber). Cette propriété n'est pas spécifique au plan. Dans le chapitre d'exemples, nous donnons une surface réglée isométrique et non congruente au caténoïde.

Notre premier objectif dans ce travail est de reformuler certains critères de [3], d'en donner de nouvelles preuves, et d'en déduire quelques conséquences non explicites dans [3]. L'une de ces conséquences est qu'une surface minimale non orientable immergée isométriquement dans E^3 est minimalement rigide. Le résultat principal de [3] dit qu'une surface minimale complète proprement plongée dans E^3 qui possède plus d'un bout est minimalement rigide. Nous en redonnons ici la démonstration dans le cas plus simple où la courbure totale est finie. Récemment, Collin [5] a montré que cette condition sur la courbure totale est équivalente à la finitude du type topologique, ceci pour les surfaces minimales proprement plongées ayant au moins deux bouts. Lorsqu'on considère des surfaces immergées il n'en va plus de même. Nous exhibons dans le chapitre d'exemples un anneau minimal complet, immergé dans E^3 , et qui n'est pas minimalement rigide.

2. RÉSULTATS

Nous convenons ici qu'une *surface* M est une variété riemannienne de dimension deux qui est connexe, sans bord, séparée, à base dénombrable et infiniment différentiable. Une surface n'est pas nécessairement complète. Deux immersions isométriques f, g de M dans l'espace euclidien E^3 de dimension trois sont *congruentes* s'il existe une isométrie A de E^3 telle que $g = A \circ f$. Une immersion isométrique $f: M \rightarrow E^3$ est *minimale* si, pour tout $p \in M$, il

existe un voisinage ouvert V de p dans M tel que la restriction de f à V soit un plongement et tel que la courbure moyenne de $f(V)$ soit nulle. Une surface M qui possède une immersion isométrique minimale $f: M \rightarrow E^3$ est *minimalement rigide* si toute autre immersion minimale isométrique de M dans E^3 est congruente à f . Le résultat fondamental de rigidité de Choi, Meeks et White (théorème 1.2 de [3]) s'énonce comme suit.

LEMME FONDAMENTAL [3]. *Soit f une immersion isométrique minimale d'une surface M dans E^3 . On suppose qu'il existe une courbe fermée lisse par morceaux dans M , donnée avec un paramétrage $\gamma: [0, l] \rightarrow M$, par abscisse curviligne, ainsi qu'un champ de vecteurs unités $V: [0, l] \rightarrow E^3$ le long de γ tangents à $f(M)$ et normaux à γ tels que*

$$\int_0^l V(s) ds \neq 0 .$$

Alors la surface M est minimalement rigide.

La démonstration de [3] est basée sur le théorème de classification de Weierstrass des immersions isométriques minimales d'ouverts simplement connexes plans munis de métriques conformes à la métrique euclidienne; pour cette théorie, voir le livre de R. Ossermann [10], pages 30-52. Nous reformulons ce résultat comme suit, et en donnons une preuve basée sur les propriétés de la dualité de Hodge entre 1-formes d'une surface orientée.

THÉORÈME 1. *Soit M une surface orientée, avec courbure de Gauss non identiquement nulle, et f une immersion isométrique minimale de M dans E^3 . Alors la forme différentielle $\star df$ est exacte si et seulement si f n'est pas minimalement rigide.*

L'étoile $\star$ désigne la dualité de Hodge, de sorte que $\star df$ est une 1-forme sur M à valeurs dans E^3 . Cette forme est fermée si et seulement si f est minimale. L'hypothèse d'orientabilité et de courbure de Gauss non identiquement nulle, qui ne figure pas dans [3], est nécessaire ici pour l'énoncé et la démonstration. Nous traitons à part les cas où la surface est non orientable ou de courbure de Gauss nulle. De manière générale l'étude des immersions isométriques minimales d'une surface non orientable se ramène à celle des immersions isométriques minimales du revêtement orientable à deux feuillets de la surface (cf. De Oliveira [9] ou Toubiana [12]). Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Les surfaces minimales non orientables immergées dans E^3 sont minimalement rigides.*

Quant aux surfaces minimales de courbure de Gauss nulle, leur rigidité minimale se démontre directement et sans difficultés. Les théorèmes 1 et 2 sont des conséquences de la proposition 3, qui caractérise les immersions isométriques ayant même application de Gauss et courbure de Gauss presque partout non nulle.

PROPOSITION 3. *Soit M une surface, orientable ou non, et f, f^* des immersions isométriques de M dans E^3 , qui ont même application de Gauss. Si la courbure de Gauss de M est presque partout non nulle dans M , l'angle entre les vecteurs $df(p; \xi)$ et $df^*(p; \xi)$ dans E^3 est indépendant de $\xi \in T_p M$, $\xi \neq 0$, et de $p \in M$.*

Dans cet énoncé, $T_p M$ désigne l'espace tangent à M en p et df est la différentielle de f . Remarquons que les vecteurs $df(p; \xi)$ et $df^*(p; \xi)$ sont non nuls de sorte que l'angle entre ces vecteurs est bien défini. La démonstration de la proposition 3 s'appuie sur deux lemmes qui traitent successivement le cas orientable et le cas non orientable. Le théorème 1 nous incite à chercher des critères géométriques qui garantissent la non-exactitude de la forme différentielle $\star df$. Nous élaborons deux critères, dont l'un figure déjà dans [3]. Ces critères permettent d'aboutir au corollaire suivant.

COROLLAIRE 5. *Une surface minimale complète dans E^3 , qui est de type topologique fini et possède au moins deux bouts, est minimalement rigide.*

La démonstration utilise un résultat récent de Collin [5].

Finalement nous donnons deux exemples. Le premier montre la non rigidité des caténoïdes et consiste en une surface réglée isométrique et non congruente au caténoïde. Le second fournit une famille à un paramètre d'immersions isométriques minimales non congruentes de l'anneau $\mathbf{R}^2/(u, v) \sim (u + 2k\pi, v)$ dans E^3 . Dans cet exemple l'anneau est muni de la métrique:

$$\frac{1}{2} (1 + e^{-2av})^2 e^{2(a-b)v} (du^2 + dv^2)$$

où a et b sont des entiers fixés avec $|a| > |b| > 0$. La famille $Z_\theta(u, v)$, $\theta \in [0, 2\pi[$, est donnée par

$$Z_\theta(u, v) = \left\{ (b \operatorname{ch} av + a \operatorname{sh} av) \frac{\cos(bu - \theta)}{(a^2 - b^2)} \begin{pmatrix} \cos au \\ \sin au \\ 0 \end{pmatrix} + (a \operatorname{ch} av + b \operatorname{sh} av) \frac{\sin(bu - \theta)}{(a^2 - b^2)} \begin{pmatrix} \sin au \\ -\cos au \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{b} \sin(bu - \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{bv}.$$

3. DÉMONSTRATIONS

Soit M une surface orientée et $f: M \rightarrow E^3$ une immersion isométrique. Nous définissons l'*application de Gauss* de f , notée $G: M \rightarrow \mathcal{S}^2$, en posant:

$$G(p) = T_p f(e_1) \wedge T_p f(e_2)$$

où (e_1, e_2) est une base orthonormée, positivement orientée de $T_p M$ et $T_p f$ est la dérivée de f en p . Dans cette définition $\mathcal{S}^2$ désigne la sphère unité centrée à l'origine dans l'espace euclidien et le symbole « $\wedge$ » y représente le produit vectoriel. L'application G est ainsi associée à f et à l'orientation de M . Un changement d'orientation de M a pour effet de changer G en $-G$. Lorsque M n'est pas orientable nous définissons l'application de Gauss comme étant l'application de M dans le plan projectif $\mathcal{P}^2$ qui associe à chaque $p \in M$ le sous-espace orthogonal à $T_p f(T_p M)$ dans E^3 .

L'application de Gauss et la courbure de Gauss de M sont intimement liées. Pour le voir, prenons M orientée et convenons de noter ω_M sa *forme volume*. C'est par définition la 2-forme différentielle prenant la valeur 1 sur tout repère orthonormé et positivement orienté, tangent à M . Par exemple la forme volume de la sphère $\mathcal{S}^2$, munie de l'orientation appropriée, est donnée par $\omega_{\mathcal{S}^2}(p; v_1, v_2) = \det(p, v_1, v_2)$. La forme différentielle induite de $\omega_{\mathcal{S}^2}$ par G sur M est une 2-forme différentielle, notée $G^\# \omega_{\mathcal{S}^2}$, qui est nécessairement du type $K\omega_M$ où K est une fonction sur M . Cette fonction est précisément la *courbure de Gauss* de M . On démontre que $K(p)$ est aussi le déterminant de l'application $T_p G \circ (T_p f)^{-1}$, considérée comme endomorphisme de $T_p f(T_p M)$ (remarquer que $T_{G(p)} \mathcal{S}^2 = T_p f(T_p M)$). En particulier si la courbure de Gauss est non nulle en $p \in M$, l'application de