Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: 2. Structure conforme sur le bord d'un CAT(-1)-espace Ensemble limite et flot géodésique associés à une action quasi-convexe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

agit de manière cocompacte sur l'enveloppe convexe $H(\Lambda)$ de son ensemble limite. Il est quasi-convexe si et seulement si il est convexe cocompact. En effet, $Q(\Lambda)$ et $H(\Lambda)$ sont à distance de Hausdorff finie. Une manière de le montrer est la suivante (voir [C]): Le convexe $H(\Lambda)$ est la réunion des n-simplexes idéaux de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, dont les arêtes sont des géodésiques de $Q(\Lambda)$ (c'est un théorème de Carathéodory appliqué au modèle de Klein de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ (voir [Ber], théorème 11.1.8.6)). Or tout point d'un n-simplexe de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ est à distance majorée par une constante universelle $C(n)$, de ses arêtes.

Signalons aussi que Γ est convexe cocompact si et seulement si il est géométriquement fini sans parabolique (une conséquence de la décomposition de Margulis en parties fines et épaisses).

Enfin, tout groupe fuchsien de type fini est géométriquement fini (voir [Bea], chapitre 10). Aussi, un groupe fuchsien est quasi-convexe si et seulement si il est de type fini sans parabolique.

2. Structure conforme sur le bord d'un CAT(-1)-espace Ensemble limite et flot géodésique associés à une action quasi-convexe

2.0. Introduction

Soit X un CAT(-1)-espace. Nous montrons que son bord admet une structure conforme canonique, compatible avec sa structure quasi-conforme. Plus précisément, nous construisons sur ∂X une famille de métriques visuelles $\{d_x, x \in X\}$, deux à deux conformes, qui ont la propriété que les isométries de X soient des applications conformes de $(\partial X, d_x)$.

Rappelons qu'une application $f: (A, d_A) \to (B, d_B)$ est conforme, si quel que soit $a_0 \in A$, la limite lorsque a tend vers a_0 de

$$\frac{d_B(f(a), f(a_0))}{d_A(a, a_0)}$$

existe et est finie non nulle. On l'appellera le facteur conforme de f en a_0. Rappelons également que deux métriques d_1, d_2 sur A, sont conformes, si l'identité $(A, d_1) \to (A, d_2)$ est conforme.

Soit maintenant une action isométrique quasi-convexe d'un groupe hyperbolique Γ sur un CAT(-1)-espace X. A cette action sont associés:

— L'ensemble limite de Γ dans ∂X, muni de la structure conforme induite, sur lequel agit Γ par transformations conformes.

— Un flot géodésique qui généralise le flot géodésique habituel du fibré unitaire tangent à une variété riemannienne compacte (voir [G] et 2.8).

Nous montrons que la structure conforme de l'ensemble limite détermine le flot géodésique et inversement. Précisons ceci:

Supposons que Γ agisse par isométries de manière quasi convexe, sur deux CAT(-1)-espaces X_1 et X_2. Notons respectivement $\Lambda_1, \Lambda_2, \mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$, les ensembles limites et les espaces du flot géodésique associés aux deux actions de Γ. D'après 1.8.5, Λ_1 et Λ_2 se correspondent par un homéomorphisme canonique. Γ-équivariant et quasi conforme:

$$\Omega : \Lambda_1 \to \Lambda_2 .$$

D'autre part, l'ensemble:

$$\Lambda_i \times \Lambda_i - \{\text{diagonale}\}/\Gamma, \ i = 1, 2$$

s'identifie à $\mathscr{O}_i$, l'ensemble des orbites (orientées) du flot de $\mathscr{E}_i$. Donc l'homéomorphisme Γ-équivariant:

$$\Omega \times \Omega : \ \Lambda_1 \times \Lambda_1 - \{\text{diagonale}\} \to \Lambda_2 \times \Lambda_2 - \{\text{diagonale}\}$$

donne par passage au quotient une bijection:

$$F : \mathscr{O}_1 \to \mathscr{O}_2 .$$

M. Gromov montre l'existence d'une équivalence d'orbite de $\mathscr{E}_1$ sur $\mathscr{E}_2$ qui induit l'application F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. (Une équivalence d'orbite est un homéomorphisme envoyant orbites sur orbites sans préserver en général le paramétrage). Nous montrons:

2.0.1. THÉORÈME. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *L'homéomorphisme quasi-conforme* Ω *est conforme.*

(ii) *L'équivalence d'orbite précédente est réalisée par une conjugaison des flots géodésiques (une équivalence d'orbite préservant le paramétrage).*

Sans doute ce théorème est-il déjà connu des spécialistes (U. Hamenstädt fait des choses assez semblables dans [H]). Il ne semble pourtant pas avoir été écrit sous cette forme, ni dans cette généralité.

Aux paragraphes 2.1, 2.2, 2.3, nous rappelons brièvement les définitions des fonctions de Busemann, de distances horosphériques et d'horosphères. Les paragraphes 2.4, 2.5, 2.6 sont consacrés à la construction de la structure conforme de ∂X. Les paragraphes 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 traitent de l'ensemble

limite et du flot géodésique associés à une action isométrique, quasi-convexe, d'un groupe hyperbolique sur X. On développe brièvement la notion de mesure conforme sur l'ensemble limite, et on rappelle une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique. Au paragraphe 2.11, nous montrons le théorème 2.0.1.

2.1. Fonctions de Busemann

Soit $r: [0, +\infty[\to X$ un rayon géodésique, et $x \in X$. D'après l'inégalité triangulaire, la fonction

$$t \mapsto |x - r(t)| - t$$

est décroissante et minorée par $-|x - r(0)|$. Appelons $b_r(x)$ sa limite en $+\infty$. L'application b_r de X dans $\mathbf{R}$ ainsi définie, est la fonction de Busemann associée au rayon r.

2.2. Distances horosphériques

Soit $x, y \in X$, $\xi \in \partial X$, et $r: [0, +\infty[\to X$ un rayon géodésique d'extrémité ξ. La quantité

$$\lim_{t \to +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$$

est égale à $b_r(x) - b_r(y)$. Elle est indépendante du rayon r d'extrémité ξ. En effet si r' est un autre rayon d'extrémité ξ, par comparaison avec $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$, on a:

$$\lim_{t \to +\infty} d(r'(t), r) = 0 . \tag{2.2.0}$$

La limite $B_\xi(x, y) = \lim_{t \to +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$ est appelée distance horosphérique de x à y relativement à ξ. Elle vérifie:

$$B_\xi(x, y) = -B_\xi(y, x) \tag{2.2.1}$$

$$B_\xi(x, z) = B_\xi(x, y) + B_\xi(y, z) \tag{2.2.2}$$

$$B_\xi(x, y) \leqslant |x - y| \tag{2.2.3}$$

avec égalité si et seulement si $y \in [x\xi)$.

2.3. Horosphères

Considérons les ensembles de niveau de la fonction:

$$f_x: z \mapsto B_\xi(x, z) .$$

D'après 2.2.2, ils sont indépendants de x. Plus précisément, l'ensemble de niveau t de f_x est égal à l'ensemble de niveau $t - B_\xi(x, y)$ de f_y. Ce sont les horosphères en ξ.

La distance horosphérique s'exprime maintenant de la manière suivante: Soient $H_{x,\xi}$ et $H_{y,\xi}$ les horosphères en ξ, passant par x et y. On a d'après 2.2.3:

$$|B_\xi(x, y)| = d(x, H_{y,\xi}) = d(H_{x,\xi}, H_{y,\xi}) .$$

Signalons aussi une autre définition des horosphères, qui permet de les relier aux sous-espaces fortement stables et fortement instables du flot géodésique: Soit $\xi \in \partial X$. Pour $x \in X$, notons $r_x : [0, +\infty[\to X$ le rayon géodésique issu de x et d'extrémité ξ. Alors:

$$H_{x,\xi} = \{y \in X \mid \lim_{t \to +\infty} |r_x(t) - r_y(t)| = 0\} . \tag{2.3.1}$$

Notons que les deux définitions coïncident, grâce à 2.2.0.

2.4. Produit de Gromov de deux éléments de ∂X

Soit x, y, z trois points de X. Rappelons que le produit de Gromov de y, z relativement à x, est défini par (voir figure 0):

$$(y \mid z)_x = \tfrac{1}{2}(|x - y| + |x - z| - |y - z|)$$

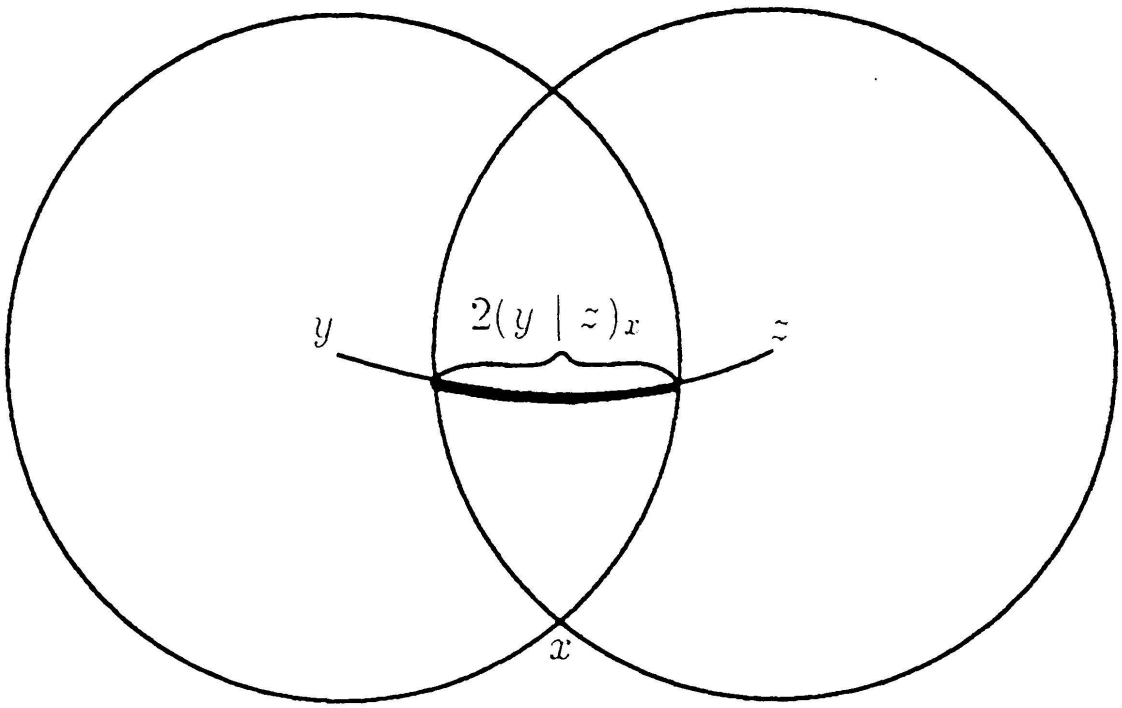

Figure 0

Soit maintenant ξ, ξ' deux points distincts de ∂X, x un point de X, et p appartenant à $(\xi\xi')$. Suivant V. Kaimanovich [K], considérons l'expression:

$$\tfrac{1}{2}(B_\xi(x,p) + B_{\xi'}(x,p)) .$$

Elle est indépendante du point p choisi sur $(\xi\xi')$. On l'appellera produit de Gromov de ξ et ξ' relativement à x, et on la notera $(\xi \mid \xi')_x$. (Voir figure 1.)

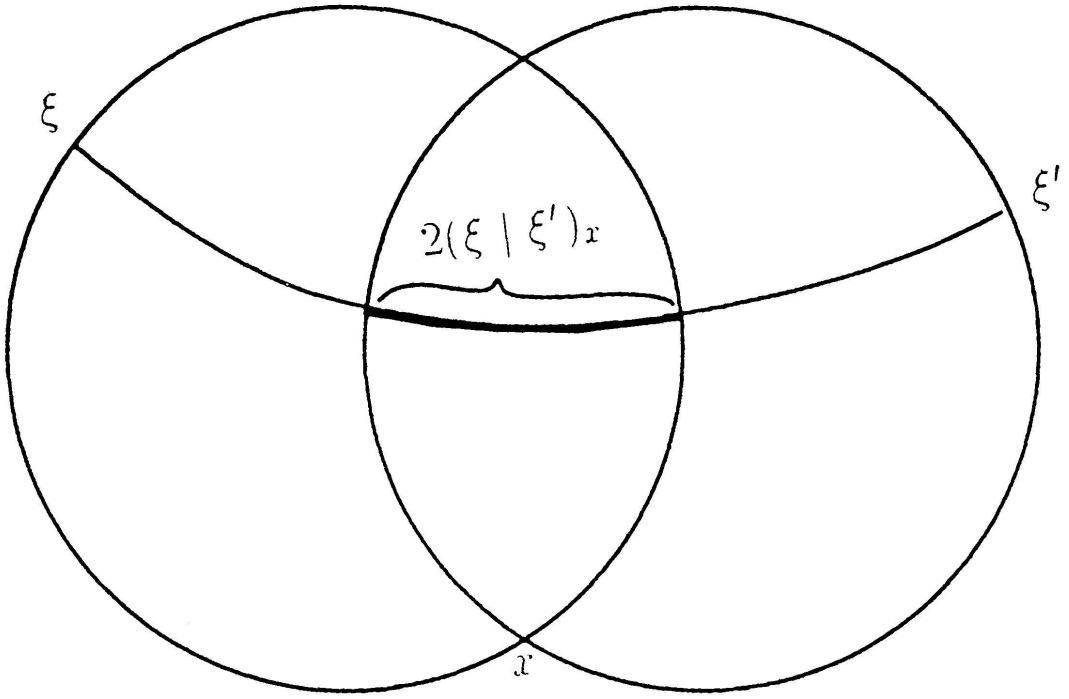

FIGURE 1

Notons que

$$(\xi \mid \xi')_x = (\xi' \mid \xi)_x \tag{2.4.1}$$

$$(\xi \mid \xi')_y = (\xi \mid \xi')_x - \tfrac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y)) . \tag{2.4.2}$$

Le lecteur vérifiera sans peine la proposition suivante:

2.4.3. PROPOSITION. *Soit* $y \in [x\xi)$ *et* $y' \in [x\xi')$. *Le produit de Gromov* $(y \mid y')_x$ *converge vers* $(\xi \mid \xi')_x$, *lorsque* y *et* y' *tendent respectivement vers* ξ *et* ξ'.

2.5. UNE FAMILLE DE MÉTRIQUES VISUELLES SUR ∂X

Soit x une origine dans X. Pour $\xi, \xi' \in \partial X$, définissons:

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi \mid \xi')_x} \quad \text{si} \quad \xi \neq \xi'$$

$$d_x(\xi, \xi') = 0 \text{ sinon} .$$

2.5.1. THÉORÈME. *d_x est une métrique sur ∂X.*

2.5.2. *Remarque.* d_x est une métrique visuelle de paramètres (x, e) (voir 1.5.1). En effet, l'expression

$$|(\xi \mid \xi')_x - d(x, (\xi\xi'))|$$

est majorée par une constante universelle (voir [G-H], chapitre 2, lemme 17).

Afin de montrer le théorème, nous introduisons un angle de comparaison, ou plutôt son sinus: Soit y, y' deux éléments de $X - \{x\}$. Soit $(\bar{x}\bar{y}\bar{y}')$ un triangle de comparaison de (xyy') dans $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$. Posons:

$$\alpha_x(y, y') = \sin \frac{\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{y}'}}{2} . \tag{2.5.3}$$

On peut également exprimer $\alpha_x(y, y')$ sans recourir à un triangle de comparaison. En effet, d'après les formules de trigonométrie dans $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$, on a:

$$\alpha_x(y, y') = \left(\frac{\operatorname{ch}|y - y'| - \operatorname{ch}(|x - y| - |x - y'|)}{2 \operatorname{sh}|x - y| \operatorname{sh}|x - y'|}\right)^{1/2} .$$

Le théorème découlera des deux lemmes suivants:

2.5.4. LEMME. *Soit $S(x, r)$ la sphère de X, de centre x et de rayon r. Sur $S(x, r)$, $r > 0$, α_x est une métrique.*

2.5.5. *Preuve de 2.5.4.* Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Soient donc y, z, t appartenant à $S(x, r)$. D'après la relation 2.5.3, les valeurs de α appartiennent à $[0, 1]$. Aussi, pour montrer l'inégalité triangulaire:

$$\alpha_x(y, t) \leqslant \alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t) ,$$

supposons:

$$\alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t) < 1 . \tag{1}$$

Soit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t} \in \mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$, tels que:

a) $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ et $(\bar{x}\bar{z}\bar{t})$ soient des triangles de comparaison de (xyz) et de (xzt).

b) $(\bar{x}\bar{z})$ sépare $\bar{y}$ et $\bar{t}$ (voir figure 2).

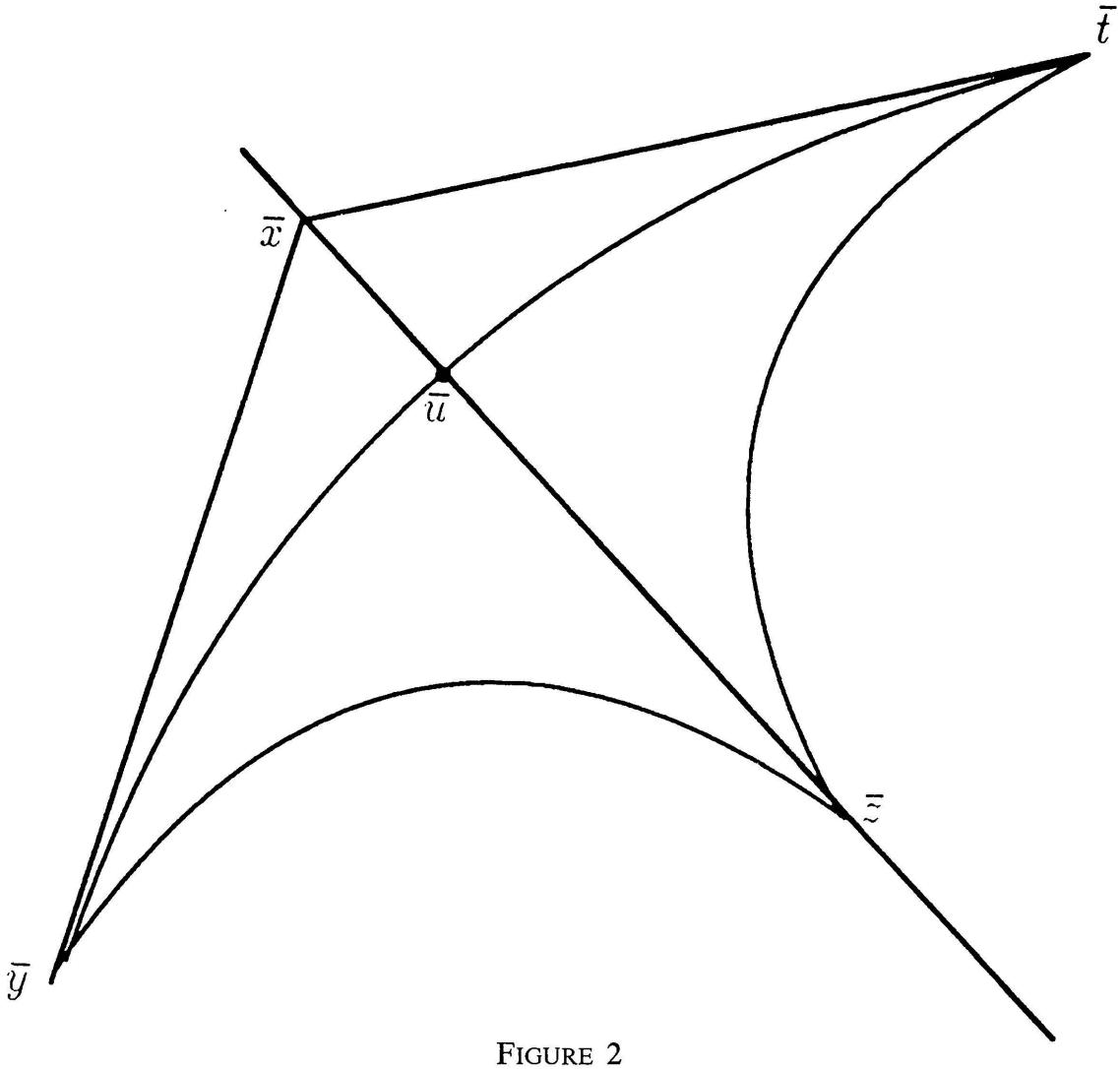

FIGURE 2

D'après 2.5.3, on a:

$$\alpha_x(y, z) = \sin \frac{\widehat{\bar{y}\,\bar{x}\,\bar{z}}}{2}, \quad \alpha_x(z, t) = \sin \frac{\widehat{\bar{z}\,\bar{x}\,\bar{t}}}{2}. \tag{2}$$

L'hypothèse (1) implique:

$$\widehat{\bar{y}\,\bar{x}\,\bar{z}} + \widehat{\bar{z}\,\bar{x}\,\bar{t}} < \pi,$$

de plus:

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{x} - \bar{z}| = |\bar{x} - \bar{t}|,$$

et $(\bar{x}\bar{z})$ sépare $\bar{y}$ et $\bar{t}$. Donc le segment $[\bar{y}\bar{t}]$ coupe $[\bar{x}\bar{z}]$ en un unique point $\bar{u}$. Soit $u \in [xz]$, le point correspondant à $\bar{u}$. L'inégalité triangulaire et l'inégalité CAT(-1) donnent alors:

$$\begin{aligned} |y - t| &\leqslant |y - u| + |u - t| \\ &\leqslant |\bar{y} - \bar{u}| + |\bar{u} - \bar{t}| \\ &= |\bar{y} - \bar{t}|. \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha_x(y,t) = \left(\frac{\operatorname{ch}|y-t| - \operatorname{ch}(|x-y|-|x-t|)}{2\operatorname{sh}|x-y|\operatorname{sh}(|x-t|}\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \left(\frac{\operatorname{ch}|\bar{y}-\bar{t}| - \operatorname{ch}(|\bar{x}-\bar{y}|-|\bar{x}-\bar{t}|)}{2\operatorname{sh}|\bar{x}-\bar{y}|\operatorname{sh}(|\bar{x}-\bar{t}|}\right)^{1/2}.$$

c'est-à-dire encore:

$$\alpha(y,t) \leqslant \sin\frac{\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{t}}}{2}. \tag{3}$$

Or $\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{t}} = \widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{z}} + \widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{t}}$, et $\sin(a+b) \leqslant \sin a + \sin b$, pour a, b appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc (2) et (3) donnent:

$$\alpha_x(y,t) \leqslant \alpha_x(y,z) + \alpha_x(z,t). \qquad \square$$

2.5.6. LEMME. *Soient* $y \in [x\xi)$, $y' \in [x\xi')$, *alors:*

$$\lim_{\substack{y\to\xi\\ y'\to\xi'}} \alpha_x(y,y') = d_x(\xi,\xi').$$

2.5.7. *Preuve de 2.5.6.* On a:

$$\alpha_x(y,y') = \left(\frac{\operatorname{ch}|y-y'|}{2\operatorname{sh}|x-y|\operatorname{sh}|x-y'|} - \frac{\operatorname{ch}(|x-y|-|x-y'|)}{2\operatorname{sh}|x-y|\operatorname{sh}|x-y'|}\right)^{1/2}.$$

Un calcul montre que:

$$\frac{\operatorname{ch}(|x-y|-|x-y'|)}{2\operatorname{sh}|x-y|\operatorname{sh}|x-y'|} = \tfrac{1}{2}(\coth|x-y|\coth|x-y'|-1).$$

Cette expression tend vers 0 lorsque $y \to \xi, y' \to \xi'$. Par ailleurs:

$$\frac{\operatorname{ch}|y-y'|}{2\operatorname{sh}|x-y|\operatorname{sh}|x-y'|} \sim e^{|y-y'|-|x-y|-|x-y'|} = e^{-2(y|y')_x},$$

or d'après la proposition 2.4.3, on a:

$$\lim_{\substack{y\to\xi\\ y'\to\xi'}} (y|y')_x = (\xi|\xi')_x.$$

D'où le lemme. $\square$

2.5.8. *Preuve du théorème 2.5.1.* Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Elle résulte des lemmes 2.5.4 et 2.5.6. □

2.5.9. EXEMPLES.

a) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$. Soit x le centre du modèle en boule. Alors:

$$d_x(\xi, \xi') = \sin \frac{\widehat{\xi x \xi'}}{2}$$

est la moitié de la longueur du segment euclidien reliant ξ à ξ' (voir figure 3).

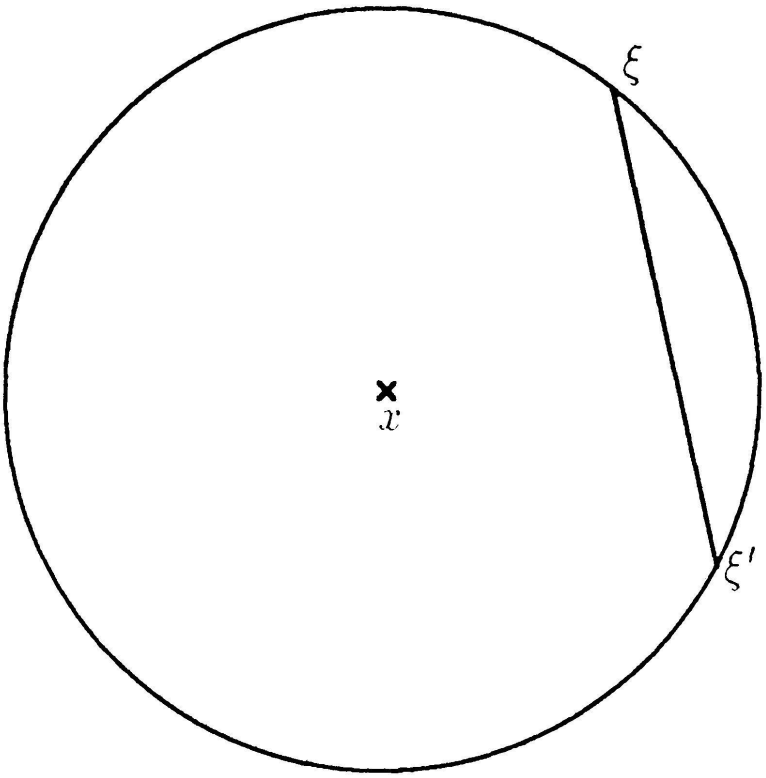

FIGURE 3

Ce n'est pas la métrique naturelle sur ∂X, qui est la métrique angulaire. Néanmoins elle lui est conforme, de facteur conforme constant égal à $\frac{1}{2}$.

b) Si X est un arbre réel:

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi \mid \xi')_x},$$

où $(\xi \mid \xi')_x$ est la longueur du trajet que font ensemble les deux rayons géodésiques issus de x et allant vers ξ et ξ' (voir figure 4).

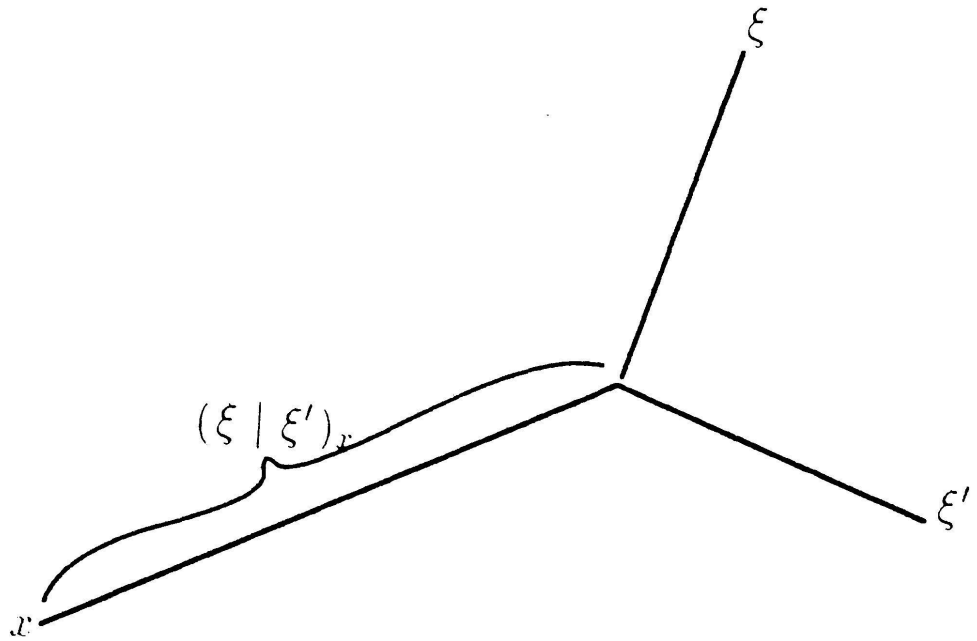

FIGURE 4

2.6. STRUCTURE CONFORME SUR ∂X

Nous montrons maintenant que la famille de métriques $\{d_x, x \in X\}$, définit une structure conforme sur ∂X. On a:

2.6.1. PROPOSITION. *Soit x une origine dans X et y, z deux éléments de X. La fonction sur $(\partial X, d_x)$, définie par:*

$$\xi \mapsto B_\xi(y, z)$$

est lipschitzienne.

2.6.2. *Preuve.* D'après les relations 2.2.1 et 2.2.2, on a:

$$B_\xi(y, z) = -B_\xi(x, y) + B_\xi(x, z) .$$

Aussi, il suffit de montrer que la fonction:

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur $(\partial X, d_x)$. D'après la définition des métriques d_x et d'après la relation 2.4.2, on a:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y))}$$

ou encore

$$B_\xi(x, y) = 2\log d_y(\xi, \xi') - 2\log d_x(\xi, \xi') - B_{\xi'}(x, y) . \tag{1}$$

Supposons que ∂X ne soit pas réduit à un point. Soit alors V un petit voisinage compact de ξ, et ξ' un élément fixé en dehors de V. La fonction:

$$\xi \mapsto 2 \log d_x(\xi, \xi')$$

est lipschitzienne sur (V, d_x). Les métriques d_x et d_y étant des métriques visuelles de paramètres respectifs (x, e) et (y, e), elles sont Lipschitz-équivalentes (voir 1.5.3.b). Donc la fonction

$$\xi \mapsto 2 \log d_y(\xi, \xi')$$

est également lipschitzienne sur (V, d_x). Dès lors, par la relation (1), la fonction:

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur (V, d_x). Maintenant la compacité de $(\partial X, d_x)$ montre qu'elle est lipschitzienne sur ∂X. $\square$

2.6.3. COROLLAIRE.

a) *Quels que soient les éléments x et y de X, les métriques d_x et d_y sont conformes.*

b) *Soit g une isométrie de X. Alors g est une application conforme de $(\partial X, d_x)$, dont le facteur conforme en ξ est:*

$$|g'(\xi)|_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

2.6.4. *Preuve:*

a) D'après la relation 2.4.2 et la définition des métriques d_x, on a:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y))} .$$

Donc la proposition 2.6.1 donne:

$$\frac{d_y(\xi, \xi')}{d_x(\xi, \xi')} \underset{\xi' \to \xi}{\to} e^{B_\xi(x,y)}$$

ce qui montre que d_x et d_y sont conformes.

b) Puisque g est une isométrie de X, on a:

$$(g\xi \mid g\xi')_x = (\xi \mid \xi')_{g^{-1}x} .$$

Donc:

$$d_x(g\xi, g\xi') = d_{g^{-1}x}(\xi, \xi')$$

et la fin de la preuve est identique au (a). $\square$

2.6.5. EXEMPLES.

a) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ et x le centre du modèle en boule. Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}})$ agit par transformations conformes sur la sphère S^n munie de la métrique euclidienne. Notons $\| g'(\xi) \|$ le facteur conforme en ξ d'un élément g de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}})$. D'après l'exemple 2.5.9(a) on a:

$$\| g'(\xi) \| = | g'(\xi) |_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

b) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ et normalisons la métrique afin que sa courbure soit comprise entre -4 et -1. Soit x le centre du modèle en boule.

Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ laisse invariant le champ d'hyperplans $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$, défini par:

$$P_\xi = \{u \in T_\xi S^{2n-1};\ h(\xi, u) = 0\}$$

où h est la forme hermitienne de $\mathbf{C}^n$:

$$h(\xi, u) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{u}_i .$$

Il agit par transformations conformes sur $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$ muni de la métrique euclidienne. Notons $\| g'(\xi) \|$ le facteur conforme sur P_ξ d'un élément g de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$. Nous allons voir qu'à nouveau:

$$\| g'(\xi) \| = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} = | g'(\xi) |_x .$$

Pour ce faire, ramenons-nous à l'exemple a) par un argument de D. Sullivan ([Su], p. 176). Observons tout d'abord que $\| g'(\xi) \|$ ne dépend que de $g^{-1}x$. En effet, si $h \in \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, alors la composée $g \circ h^{-1}$ fixe x le centre du modèle en boule, donc $g \circ h^{-1}$ appartient à $U(n)$ et:

$$\| g'(\xi) \| = \| h'(\xi) \| .$$

Choisissons donc judicieusement h. Notons y l'intersection de l'horosphère H_ξ, basée en ξ, contenant $g^{-1}x$, avec la géodésique $(x\xi)$. Le stabilisateur de H_ξ dans $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ agit transitivement sur H_ξ, de plus le facteur conforme de ses éléments en P_ξ est 1. Soit p un élément de $\mathrm{Stab}(H_\xi)$, vérifiant

$$p(g^{-1}x) = y .$$

Soit aussi une copie de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ contenant la géodésique $(x\xi)$. L'espace tangent à son bord en ξ est contenu dans P_ξ. Soit t un élément de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ qui fixe cette copie et envoie y sur x.

D'après l'exemple (a), on a:

$$\| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,y)} = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

Par ailleurs, la composée $h = t \circ p$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, d'où:

$$\| g'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| \, \| p'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe

Soit Γ un groupe quasi-convexe d'isométries de X (voir 1.8), non élémentaire. Son ensemble limite Λ hérite de la structure conforme de ∂X. Notons $p(x, y, \xi)$ le facteur conforme en $\xi \in \Lambda$, de l'application identité de (Λ, d_x) sur (Λ, d_y). D'après le corollaire 2.6.3 (ou plutôt sa preuve), on a:

$$p(x, y, \xi) = e^{B_\xi(x,y)} . \tag{2.7.1}$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.6.3, Γ agit par transformations conformes sur (Λ, d_x). Le facteur conforme de $g \in \Gamma$ en ξ, est:

$$| g'(\xi) |_x = p(x, g^{-1}x, \xi) . \tag{2.7.2}$$

Comme dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, on définit la notion de mesure α-conforme sur Λ (voir [Su], [N], et [C] pour une notion analogue sur les espaces hyperboliques généraux):

La collection de mesures $\{\mu_x, x \in X\}$ est une mesure α-conforme, si pour tout $x \in X$, μ_x est finie non nulle, de support inclus dans Λ, et si pour tout $x, y \in X$ et $g \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \mu_y &= [p(x, y, .)]^\alpha \mu_x \\ g^* \mu_x &= \mu_{g^{-1}x} = | g' |_x^\alpha \mu_x . \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

La théorie des mesures conformes est essentiellement la même que pour les groupes convexes cocompacts de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$. La seule différence est qu'une boule de Λ n'est pas en général une ombre. Néanmoins elle en est presque une d'après 1.6.2. Soit τ la dimension de Hausdorff de (Λ, d_x). Soit ν_x la τ-mesure de Hausdorff de (Λ, d_x). On a:

2.7.4. Théorème. *La collection* $\{\nu_x, x \in X\}$ *est une* τ*-mesure conforme. De plus, toute mesure conforme est une* τ*-mesure conforme, égale à une constante près à* $\{\nu_x, x \in X\}$.

De plus:

2.7.5. THÉORÈME.

a) *La dimension* τ *est égale au taux de croissance de* Γ *dans* X. *C'est-à-dire:*

$$\tau = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n\} .$$

b) *La* ν_x*-mesure d'une boule de* (Λ, d_x), *est proportionnelle à son rayon à la puissance* τ. *Autrement dit: il existe une constante* $C_x \geqslant 1$, *telle que pour toute boule* $B(\xi, r)$ *centrée sur* Λ, *on ait:*

$$C_x^{-1} r^\tau \leqslant \nu_x(B(\xi, r)) \leqslant C_x r^\tau .$$

Rappelons les principales étapes de la démonstration de ces résultats: Soit $\alpha_0 = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \#\{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n\}$. S.J. Patterson a exhibé une mesure α_0-conforme (voir par exemple [Su], p. 175). D'autre part d'après D. Sullivan, si $\{\mu_x, x \in X\}$ est une α-mesure conforme, alors la μ_x mesure d'une boule de Λ est proportionnelle à son rayon à la puissance α (c'est le lemme de l'ombre [Su], p. 180). Dès lors par un principe général, α (et en particulier α_0) est égal à τ, les mesures μ_x et ν_x sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et leurs densités sont bornées. Ainsi on obtient 2.7.5. Maintenant puisque ν_x est finie, $\{\nu_x, x \in X\}$ est une τ-mesure conforme (voir 2.6.3). Deux τ-mesures conformes absolument continues l'une par rapport à l'autre sont égales (voir [Su], p. 181). Le théorème 2.7.4 en découle.

2.8. FLOT GÉODÉSIQUE ASSOCIÉ À UNE ACTION QUASI-CONVEXE

Soit X un CAT(-1)-espace, sur lequel agit Γ par isométrie de manière quasi-convexe. Notons Λ l'ensemble limite de Γ dans ∂X. Définissons $G\Lambda$ l'ensemble des géodésiques (paramétrées) de X, dont les extrémités appartiennent à Λ:

$$G\Lambda = \{\gamma : \mathbf{R} \to X \text{ isométries avec } \gamma(-\infty) \in \Lambda, \gamma(+\infty) \in \Lambda\} .$$

Et équipons-le de la métrique suivante:

$$|\gamma - \gamma'|_{GA} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \frac{e^{-|t|}}{2} dt .$$

La topologie associée est celle de la convergence uniforme sur les compacts.

En effet, on a:

2.8.1. PROPOSITION. *Quel que soit* $T \geqslant 0$, *alors:*

$$e^{-T} \sup_{t \in [-T,T]} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \leqslant |\gamma - \gamma'|_{GA}$$
$$\leqslant \sup_{t \in [-T,T)} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X + 2e^{-T} .$$

2.8.2. *Preuve.* L'inégalité de droite est un simple calcul. L'inégalité de gauche provient de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe (voir 1.3):

$$t \mapsto |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X . \qquad \square$$

Clairement, le groupe Γ agit par isométries sur $(G\Lambda, |\ |_{G\Lambda})$ de manière proprement discontinue. L'espace métrique quotient:

$$\mathscr{E} = G\Lambda/\Gamma$$

est l'espace du flot géodésique, associé à la paire (X, Γ). Notons que $\mathscr{E}$ est compact. En effet, Γ est quasi-convexe, donc le quotient de l'enveloppe de Gromov de Λ par Γ est compact (voir 1.8.6).

Le flot géodésique de $G\Lambda$ est le groupe à un paramètre d'homéomorphisme $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$, provenant de l'action naturelle de $\mathbf{R}$ sur $G\Lambda$. Il est défini par:

$$\Phi_T(\gamma) = \gamma_T, \quad \text{avec} \quad \gamma_T(t) = \gamma(t + T) . \tag{2.8.3}$$

Remarquons que pour tout $T \in \mathbf{R}$, $g \in \Gamma$, et $\gamma \in G\Lambda$:

$$\Phi_T(g\gamma) = g\Phi_T(\gamma) . \tag{2.8.4}$$

Le flot géodésique de $\mathscr{E}$ est le groupe à un paramètre d'homéomorphismes, induit sur $\mathscr{E}$ par la relation 2.8.4. On le notera encore $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$.

Par analogie aux flots d'Anosov, on définit les sous-ensembles fortement stables et fortement instables de $(G\Lambda, \Phi_T)$. En $\gamma \in G\Lambda$, ils sont respectivement définis par:

$$W^{ss}(\gamma) = \left\{\eta \in G\Lambda \mid |\Phi_T(\eta) - \Phi_T(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0\right\}$$

$$W^{uu}(\gamma) = \left\{\eta \in G\Lambda \mid |\Phi_{-T}(\eta) - \Phi_{-T}(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0\right\} .$$

Ils forment un feuilletage Φ_T-invariant de $G\Lambda$. D'après 2.3.1, ils sont liés aux horosphères de la manière suivante:

$$(2.8.5)\quad \begin{aligned} W^{ss}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0),\gamma(+\infty)}, \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\} \\ W^{uu}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0),\gamma(-\infty)}, \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}\,. \end{aligned}$$

Observons qu'ils sont canoniquement homéomorphes à Λ privé d'un point. On définit les sous-ensembles fortement stables et instables de $(\mathscr{E}, \Phi_T)$ par:

2.8.6. DÉFINITION. *Soit π la projection de $G\Lambda$ sur $\mathscr{E}$, alors:*

$$W^{ss}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{ss}(\gamma))$$
$$W^{uu}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{uu}(\gamma))\,.$$

Le sous-ensemble faiblement stable (resp. instable) de $G\Lambda$ en γ, est la réunion des sous-ensembles fortement stables (resp. instables), le long de l'orbite de γ sous Φ_T. En d'autres termes:

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{ss}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\}$$
$$W^u(\gamma) = \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{uu}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}\,.$$

De même, sont définis les sous-ensembles faiblement stables et instables de $\mathscr{E}$. D'après la définition 2.8.6, ils sont correspondance avec ceux de $G\Lambda$, via la projection de $G\Lambda$ sur $\mathscr{E}$.

2.9. LE PARAMÉTRAGE DE HOPF DE $(\mathscr{E}, \Phi_T)$

Choisissons une origine x dans X. Soit Δ la diagonale de $\Lambda \times \Lambda$. On définit une application de $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$ dans $G\Lambda$, de la manière suivante: à

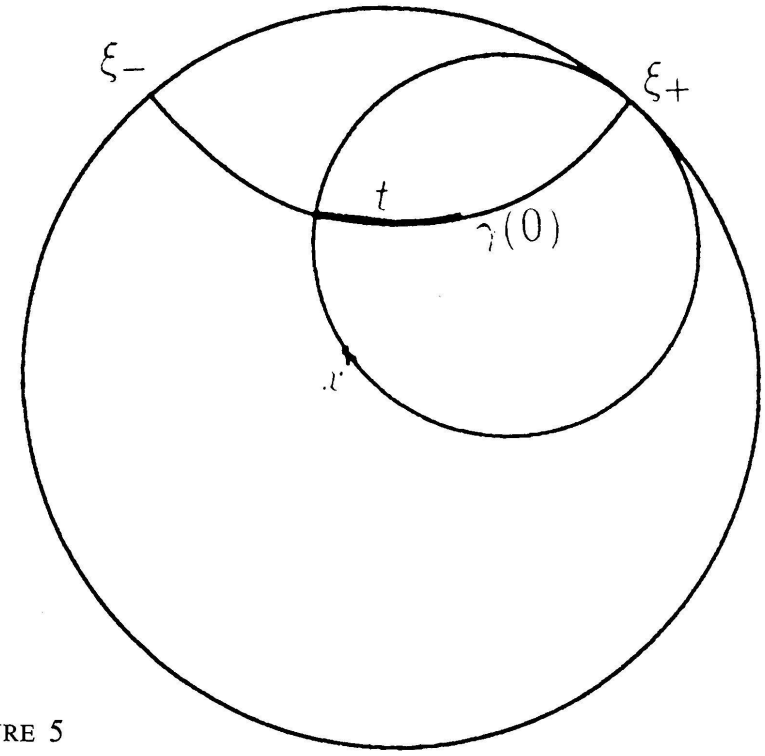

FIGURE 5

l'élément (ξ_-, ξ_+, t) de $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$, associons l'unique élément γ de $G\Lambda$ vérifiant (voir figure 5):

$$\gamma(-\infty) = \xi_-, \gamma(+\infty) = \xi_+, B_{\xi_+}(x, \gamma(0)) = t . \tag{2.9.1}$$

Le lecteur vérifiera aisément que l'application ainsi définie est un homéomorphisme. Notons que dans ces coordonnées Φ_T s'écrit:

$$\Phi_T(\xi_-, \xi_+, t) = (\xi_-, \xi_+, t + T) . \tag{2.9.2}$$

Notons également que les sous-ensembles fortement stables du flot ont pour coordonnées (voir 2.8.5):

$$\{(\xi_-, \xi_+, t),\ \xi_- \in \Lambda - \{\xi_+\}\} . \tag{2.9.3}$$

Par ailleurs, en coordonnées l'action de Γ s'écrit:

$$g(\xi_-, \xi_+, t) = (g\xi_-, g\xi_+, t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x)) . \tag{2.9.4}$$

Aussi, on obtient un homéomorphisme:

$$(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}/_\sim \to \mathscr{E} \tag{2.9.5}$$

en définissant la relation d'équivalence suivante sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$:

$$(\xi_-, \xi_+, t) \sim (\xi'_-, \xi'_+, t')$$

si et seulement si, il existe $g \in \Gamma$ tel que:

$$\xi'_- = g\xi_-, \xi'_+ = g\xi_+, t' = t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x) .$$

2.10. Mesure d'entropie maximale

On rappelle ici une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique, due à D. Sullivan ([Su], [Su2]), dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, puis généralisée par V. Kaimanovich [K].

Soit x un élément de X, et soit respectivement τ et ν_x la dimension et la mesure de Hausdorff de (Λ, d_x) (voir 2.7). La mesure:

$$\mu = \frac{\nu_x \times \nu_x}{[d_x(\xi, \xi')]^{2\tau}} \tag{2.10.1}$$

est une mesure de Radon sur $\Lambda \times \Lambda - \Delta$. Elle est indépendante de x et Γ-invariante. En effet $\{\nu_x, \nu \in X\}$ est une mesure τ-conforme (voir 2.7.4), de plus d'après 2.4.2 et 2.7.1:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi')\ [p(x, y, \xi)\, p(x, y, \xi')]^{1/2} .$$

Le paramétrage de Hopf permet d'identifier $G\Lambda$ à $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$. Soit alors $\tilde{m}$ la mesure sur $G\Lambda$ définie par:

$$\tilde{m} = \mu \times dt .$$

C'est une mesure de Radon. Γ-invariante et Φ_T-invariante. La mesure m, restriction de $\tilde{m}$ au compact $\mathscr{E}$, (considéré comme un domaine fondamental de Γ dans $G\Lambda$), est finie et Φ_T-invariante. On a:

2.10.2. THÉORÈME. *Φ_T est ergodique sur $(\mathscr{E}, m)$.*

La preuve de ce théorème est mot pour mot la preuve classique de Hopf [Ho]. Le point essentiel est que μ s'écrive comme un produit de deux mesures sur Λ.

Clairement, l'ergodicité de Φ_T sur $(\mathscr{E}, m)$ est équivalente à celle de Γ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$. Puisque μ et $\nu_x \times \nu_x$ sont absolument continues, l'ergodicité de Γ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ entraîne l'ergodicité de Γ sur (Λ, ν_x). D'où,

2.10.3. COROLLAIRE. *L'action de Γ est ergodique sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ et sur (Λ, ν_x).*

Notons respectivement h et h_m, l'entropie topologique de Φ_T et l'entropie mesurable de (Φ_T, m). Elles se calculent comme dans le cas convexe cocompact (voir [Su2], p. 275-276, [K]). On obtient:

2.10.4. THÉORÈME. *$h = h_m = \tau$. Ainsi m maximise l'entropie mesurable.*

2.11. PREUVE DU THÉORÈME 2.0.1.

Nous renvoyons à l'introduction pour les notations. Nous montrons d'abord deux lemmes:

Soient x_1, x_2 des origines respectivement de X_1 et X_2. Notons d_1 et d_2 les métriques d_{x_1} et d_{x_2} sur Λ_1 et Λ_2.

2.11.1. LEMME. *Supposons que l'application $\Omega : (\Lambda_1, d_1) \to (\Lambda_2, d_2)$ soit conforme. Alors, son facteur conforme ω est continu sur Λ_1.*

2.11.2. *Preuve de 2.11.1.* Puisque Ω est conforme, les ensembles limites Λ_1 et Λ_2 ont même dimension de Hausdorff τ. De plus, en notant ν_1 et ν_2 les τ-mesures de Hausdorff de (Λ_1, d_1) et (Λ_2, d_2), on a:

$$\Omega^* \nu_2 = \omega^\tau \nu_1 . \tag{1}$$

Soit μ_1 et μ_2 les mesures sur $\Lambda_1 \times \Lambda_1 - \Delta$ et $\Lambda_2 \times \Lambda_2 - \Delta$, définies par la relation 2.10.1. D'après l'égalité (1), la mesure:

$$(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$$

est absolument continue par rapport à μ_1. De plus, μ_2 est Γ-invariante et Ω est Γ-équivariant, donc $(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$ est Γ-invariante. Alors, puisque l'action de Γ est ergodique sur $(\Lambda_1 \times \Lambda_1 - \Delta, \mu_1)$ (corollaire 2.10.3), les mesures $(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$ et μ_1 sont égales à une constante près. Donc, à une constante près leurs densités par rapport à $\nu_1 \times \nu_1$ sont presque sûrement égales. D'où $\nu_1 \times \nu_1$-presque sûrement:

$$\frac{\omega^\tau(\xi)\omega^\tau(\xi')}{[d_1(\xi, \xi')]^{2\tau}} = \frac{\text{Cste}}{[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^{2\tau}},$$

soit encore

$$[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^2 = (\text{Cste})^{1/\tau} \omega(\xi)\omega(\xi') \, [d_1(\xi, \xi')]^2 .$$

L'application $\Omega: (\Lambda_1, d_1) \to (\Lambda_2, d_2)$ étant continue, ω l'est également. Notons qu'en faisant tendre ξ' vers ξ, on trouve Cste $= 1$. $\square$

Soit maintenant s_i l'involution de $G\Lambda_i$ définie par:

$$s_i(\gamma) = \gamma' \quad \text{avec} \quad \gamma'(t) = \gamma(-t) .$$

Par passage au quotient on obtient une involution de $\mathscr{E}_i$ que l'on notera encore s_i.

2.11.3. LEMME. *Supposons que l'homéomorphisme* $G: \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ *conjugue les flots géodésiques. Quitte à remplacer* G *par* $G' = \Phi_{T_0} \circ G$ *pour un certain réel* T_0, *on peut supposer:*

$$G \circ s_1 = s_2 \circ G .$$

2.11.4. *Preuve de 2.11.3.* Soit T la fonction sur $\mathscr{E}_1$ dans $\mathbf{R}$, définie de la manière suivante: Etant donné $\gamma \in \mathscr{E}_1$, $T(\gamma)$ est l'unique réel vérifiant:

$$\Phi_{T(\gamma)}(G \circ s_1(\gamma)) = s_2 \circ \Phi_{T(\gamma)}(G(\gamma)) . \tag{1}$$

La fonction T est continue et invariante par le flot de $\mathscr{E}_1$. Aussi elle est constante (par l'ergodicité du flot sur $(\mathscr{E}_1, m_1)$; (théorème 2.10.2)). Notons T_0 la valeur constante de T, et G' l'application $\Phi_{T_0} \circ G$. D'après (1), on a:

$$G' \circ s_1 = s_2 \circ G' . \quad \square$$

2.11.5. *Preuve de 2.0.1.* Montrons (i) ⇒ (ii).

Soit $g \in \Gamma$. Notons respectivement $|g'|_1$ et $|g'|_2$, le facteur conforme de g sur (Λ_1, d_1) et (Λ_2, d_2). En écrivant:

$$\Omega \circ g = g \circ \Omega .$$

et en calculant le facteur conforme des deux membres, on obtient:

$$(\omega \circ g)\,|g'|_1 = (|g'|_2 \circ \Omega)\omega . \tag{1}$$

Construisons maintenant notre conjugaison: Paramétrons $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ comme au paragraphe 2.9, en choisissant pour origines les points x_1 et x_2. Définissons une application $\tilde{G}$ de $G\Lambda_1$ dans $G\Lambda_2$, par:

$$\tilde{G}(\xi_-, \xi_+, t) = (\Omega(\xi_-), \Omega(\xi_+), t - \log\omega(\xi_+)) .$$

D'après le lemme 2.11.1, ω est continue, donc $\tilde{G}$ est un homéomorphisme. D'après la relation 2.9.2, il conjugue les flots de $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$. De plus, quel que soit $g \in \Gamma$, il vérifie:

$$\tilde{G} \circ g = g \circ \tilde{G} . \tag{2}$$

En effet, d'après 2.9.4 on a:

$$\begin{aligned}&(\tilde{G} \circ g)\,(\xi_-, \xi_+, t)\\ &= (\Omega \circ g(\xi_-), \Omega \circ g(\xi_+), t - B_{\xi_+}(x_1, g^{-1}x_1) - \log\omega \circ g(\xi_+))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(g \circ \tilde{G})\,(\xi_-, \xi_+, t)\\ &= (g \circ \Omega(\xi_-), g \circ \Omega(\xi_+), t - \log\omega(\xi_+) - B_{\Omega(\xi_+)}(x_2, g^{-1}x_2)) .\end{aligned}$$

Or d'après le corollaire 2.6.3,

$$B_{\xi_+}(x_1, g^{-1}x_1) = \log|g'(\xi_+)|_1$$

et

$$B_{\Omega(\xi_+)}(x_2, g^{-1}x_2) = \log(|g'|_2 \circ \Omega(\xi_+)) .$$

Ainsi l'égalité (2) provient de (1) et de la Γ-équivariance de Ω. Grâce à (2), on obtient une conjugaison des flots de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. Par construction, elle induit l'application F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$.

Montrons (ii) ⇒ (i).

Soit $G\colon \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ une conjugaison des flots, qui induit l'application F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. D'après le lemme 2.11.3, on peut supposer:

(3) $$G \circ s_1 = s_2 \circ G .$$

Relevons la conjugaison G à $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ de la manière suivante: Soit π_i la projection de $G\Lambda_i$ sur $\mathscr{E}_i$. Pour $\gamma: \mathbf{R} \to X_1$ appartenant à $G\Lambda_1$, soit $\gamma': \mathbf{R} \to X_2$, un élément de $G\Lambda_2$ vérifiant:

$$\gamma'(-\infty) = \Omega(\gamma(-\infty)), \quad \gamma'(+\infty) = \Omega(\gamma(+\infty))$$

et

$$\pi_2(\gamma') = G(\pi_1(\gamma)) .$$

Notons que γ' existe puisque G induit F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. De plus, si $\pi_1(\gamma)$ n'appartient à aucune orbite périodique de $\mathscr{E}_1$, γ' est unique. On obtient ainsi une application

$$\begin{aligned} \tilde{G}: G\Lambda_1 &\to G\Lambda_2 \\ \gamma &\mapsto \gamma' \end{aligned}$$

définie sauf sur les relevés des orbites périodiques, qui conjugue les flots, vérifie:

$$G \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{G} .$$

ainsi que, d'après (3):

(4) $$\tilde{G} \circ s_1 = s_2 \circ \tilde{G} .$$

Paramétrons $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ comme au paragraphe 2.9, en choisissant les points x_1 et x_2 comme origines. Puisque G est une conjugaison continue entre les compacts $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$, elle est uniformément continue. Aussi elle envoie sous-ensembles fortement stables sur sous-ensembles fortement stables. D'après sa définition et la proposition 2.8.6, $\tilde{G}$ a la même propriété. Aussi, d'après 2.9.3, $\tilde{G}$ s'écrit en coordonnées:

$$\tilde{G}(\xi_-, \xi_+, t) = (\Omega(\xi_-), \Omega(\xi_+), t - \log \omega(\xi_+)) ,$$

pour une certaine fonction ω de Λ_1 dans $]0, +\infty[$. Notons que ceci permet de définir $\tilde{G}$ sur $G\Lambda_1$ tout entier.

Comparons maintenant les métriques $d_1 = d_{x_1}$ et $d_2 = d_{x_2}$ sur Λ_1 et Λ_2: Soit ξ et ξ' deux points distincts de Λ_1, et p appartenant à $(\xi\xi')$. Soit γ l'élément de $G\Lambda_1$, vérifiant:

$$\gamma(-\infty) = \xi, \ \gamma(+\infty) = \xi' \quad \text{et} \quad \gamma(0) = p .$$

Les points $\tilde{G}(\gamma)(0)$ et $\tilde{G}(s_1(\gamma))(0)$ appartiennent à la géodésique $(\Omega(\xi)\Omega(\xi'))$ de X_2. D'après (4) ils sont égaux. Notons-les q. En coordonnées on a:

$$\gamma = (\xi, \xi', B_{\xi'}(x_1, p))$$

et

$$s_1(\gamma) = (\xi', \xi, B_{\xi}(x_1, p)) .$$

D'où:

$$\tilde{G}(\gamma) = (\Omega(\xi), \Omega(\xi'), B_{\xi'}(x_1, p) - \log \omega(\xi'))$$

et

$$\tilde{G}(s_1(\gamma)) = (\Omega(\xi'), \Omega(\xi), B_{\xi}(x_1, p) - \log \omega(\xi))$$

donc

$$(5) \qquad B_{\Omega(\xi')}(x_2, q) = B_{\Omega(\xi')}(x_2, \tilde{G}(\gamma)(0)) = B_{\xi'}(x_1, p) - \log \omega(\xi')$$

et

$$(6) \qquad B_{\Omega(\xi)}(x_2, q) = B_{\Omega(\xi)}(x_2, \tilde{G}(s_1(\gamma))(0)) = B_{\xi}(x_1, p) - \log \omega(\xi) .$$

Ainsi (5) et (6) donnent:

$$[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^2 = \omega(\xi)\omega(\xi') \, [d_1(\xi, \xi')]^2 .$$

Puisque l'application Ω de (Λ_1, d_1) sur (Λ_2, d_2) est continue, ω l'est également. Alors, en faisant tendre ξ' vers ξ, Ω est conforme de facteur conforme ω. $\square$

RÉFÉRENCES

[Be] BENAKLI, N. *Polyèdres hyperboliques, passage du local au global.* Thèse, Université de Paris-Sud, 1992.

[Bea] BEARDON, A.F. *The geometry of discrete groups.* G.T.M. 91, Springer, 1983.

[Ber] BERGER, M. *Géométrie, Vol. 3.* Cedric Nathan, 1978.

[C] COORNAERT, M. Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de M. Gromov. *Pacific J. of Math. 159* (1993), 241-270.

[C-D-P] —— T. DELZANT et A. PAPADOPOULOS. *Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de Gromov.* Lecture Notes in Math. 1441. Springer, 1990.

[C-E-H-P-T] CANNON, J.W., D.B.A. EPSTEIN, D.F. HOLT, M.S. PATERSON et W.P. THURSTON. *Word processing and group theory.* Bartlett and Jones, Boston, 1992.