Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DENSITÉ DANS DES FAMILLES DE RÉSEAUX. APPLICATION AUX RÉSEAUX ISODUAUX

Autor: Bergé, Anne-Marie / Martinet, Jacques

Kapitel: 8. Classification des réseaux isoduaux de petite dimension

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61830

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

propre (unitaire) a pour σ, par exemple $a \in E^+$. L'endomorphisme v qui échange les vecteurs e' et a et qui est nul sur l'orthogonal du plan $\langle a, e' \rangle$ appartient à $\mathscr{E}$ (si a appartient à E^-, on remplace e' par e). De plus, $S \subset G$ est inclus dans l'hyperplan $\operatorname{Ker} v \perp \mathbf{R}a$ sur lequel $\varphi_x(v)$ est nul ou de signe constant (même démonstration que dans le cas symplectique). On peut donc construire à partir de v ou de $-v$ un nouveau réseau σ-extrême dont l'ensemble des vecteurs minimaux $S \cap \operatorname{Ker} v$ est contenu dans le sous-espace σ-stable $G \cap \operatorname{Ker} v$ strictement contenu dans G (puisque a n'appartient pas à $\operatorname{Ker} v$), ce qui est contraire au caractère minimal de G. $\square$

8. Classification des réseaux isoduaux de petite dimension

Dans ce paragraphe on considère un élément $\sigma \in \mathrm{O}(E)$, généralement tel que $\sigma^2 = \pm \mathrm{Id}$ (et $\sigma \neq \pm \mathrm{Id}$), et l'on recherche les réseaux σ-isoduaux strictement extrêmes pour σ. D'après le corollaire 4.9, le nombre s de couples $\pm x$ de vecteurs minimaux d'un tel réseau est $\geqslant \dim(\mathscr{G}_\sigma) + 1$, puisque le groupe de Lie $\mathscr{G}_\sigma$ est contenu dans le noyau du déterminant. Dans les cas orthogonal et symplectique, on déduit du th. 7.4 les minorations suivantes:

8.1. Proposition. *Soit L un réseau σ-isodual σ-extrême.*

(1) *Si L est σ-orthogonal, on a $s \geqslant pq + 1$, où p et q sont les multiplicités des valeurs propres $+1$ et -1 de σ $(p + q = n)$.*

(2) *Si L est σ-symplectique, on a $s \geqslant m^2 + m + 1$ $(n = 2m)$.*

Le cas de la dimension 2 est facile: les réseaux de déterminant 1 sont tous isoduaux pour une rotation d'ordre 4, et les réseaux extrêmes sont semblables à A_2. (Du reste, on a $s \geqslant 3$ par 8.1.) Ceux qui sont isoduaux pour une autre transformation sont semblables à $\mathbf{Z}^2$ ou à A_2.

Les réseaux isoduaux de dimension 3 ont été décrits par Conway et Sloane dans [C-S3], qui trouvent deux familles. L'une d'elle, qui correspond à une rotation d'ordre 4, est formée de réseaux réductibles, cf. la fin du §4. L'autre correspond au cas où $\pm\sigma$ est une rotation d'angle π. Pour cette famille, il y a un unique réseau σ-extrême, le réseau *ccc* de [C-S3].

On retrouve ce résultat en utilisant la classification (au sens de la déf. 5.1, appliquée à l'exemple 2.3) qui est faite dans [Ber]. On montre en effet

([Ber], 2.8) que les seules classes de réseaux de dimension 3 avec $s(L) = s(L^*) \geqslant 3$ sont représentées (modulo similitudes) par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}, \; -1/3 < t < 1/2 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2t-1 & -t \\ 2t-1 & 1 & -t \\ -t & -t & 1 \end{pmatrix}, \; 1/3 < t < 1/2 .$$

On voit facilement que les réseaux correspondants sont normaux (et en fait isoduaux) uniquement pour $t = 0$ dans le premier cas (il s'agit alors de $\mathbf{Z}^3$), et pour $t = \sqrt{2} - 1$ dans le second, ce qui correspond au réseau *ccc*.

Le but de la suite du § est d'obtenir une classification des réseaux isoduaux de dimension 4 ayant beaucoup de vecteurs minimaux. Nous nous appuierons sur la notion de réseau normal (déf. 6.5). Nous donnerons en passant des résultats un tout petit peu plus généraux.

8.2. THÉORÈME. *Un réseau normal de dimension* $\leqslant 8$ *possédant une section hyperplane critique (i.e. absolument extrême) est semblable à l'un des réseaux de racines* A_2, D_4, E_8.

Démonstration. Soit L un tel réseau, et M une section hyperplane critique de L, de norme $N(L)$; son déterminant est donné par la formule

$$\det(M) = \frac{N(L)^{n-1}}{\gamma_{n-1}^{n-1}} .$$

Le minimum de L^* est atteint sur les vecteurs primitifs de L^* orthogonaux à M, et l'on a donc

$$N(L^*) = \frac{\det(M)}{\det(L)} = \frac{1}{\det(L)} \frac{N(L)^{n-1}}{\gamma_{n-1}^{n-1}} .$$

Le réseau L étant normal, la proposition 6.6 entraîne l'égalité

$$N(L^*) = N(L) \det(L)^{-2/n}$$

En égalant ces deux expressions, on trouve la relation

$$\gamma(L)^{n-2} = \gamma_{n-1}^{n-1} .$$

Or, l'inégalité de Mordell (cf. [Cas], ch. X, § 3) s'écrit

$$\gamma_n^{n-2} \leqslant \gamma_{n-1}^{n-1} .$$

Le réseau L réalise donc le maximum γ_n de l'invariant d'Hermite, et ce dernier vérifie $\gamma_n^{n-2} = \gamma_{n-1}^{n-1}$, ce qui, pour les dimensions pour lesquelles sa valeur est connue, i.e. $n \leqslant 8$, ne se produit que pour $n = 2$, $n = 4$ et $n = 8$. $\square$

8.3. THÉORÈME. *Soit L un réseau normal de dimension paire $n = 2m$, et soit M une section critique de dimension m de L, de même norme que L. Alors, l'orthogonal $M^\perp$ de M dans L^* est critique et de même norme que L^*.*

Dans le cas $m = 2$, si $\mathscr{B}$ est une base de L formée de vecteurs minimaux dont les m premiers engendrent M, les m derniers vecteurs de $\mathscr{B}^*$ sont minimaux et engendrent $M^\perp$.

Démonstration. De façon générale, pour toute section M de tout réseau L, on a $\det(M) = \det(L)\det(M^\perp)$. Dans le cas qui nous occupe, compte tenu de la proposition 6.6, on a $\frac{\det(M)}{\det(M^\perp)} = \frac{N(L)^m}{N(L^*)^m}$, et donc

$$\frac{\gamma(M^\perp)^m}{\gamma(M)^m} = \frac{\det(M)}{\det(M^\perp)} \cdot \frac{N(M^\perp)^m}{N(M)^m} = \frac{N(L)^m}{N(M)^m} \cdot \frac{N(M^\perp)^m}{N(L^*)^m} = \frac{N(M^\perp)^m}{N(L^*)^m} \geqslant 1 ;$$

puisque M réalise le maximum γ_m de l'invariant d'Hermite en dimension m, l'inégalité précédente est une égalité, et l'on a donc $\gamma(M^\perp) = \gamma(M) = \gamma_m$ et $N(M^\perp) = N(L^*)$, ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

Considérons maintenant la base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout vecteur minimal x' de L^*, les composantes dans $\mathscr{B}^*$ de x' sont les produits scalaires $x' . e_i$, entiers bornés par (utiliser l'inégalité de Schwarz)

$$\sqrt{N(x')N(e_i)} = \sqrt{N(L^*)N(L)} = \sqrt{\gamma(L^*)\gamma(L)} \leqslant \gamma_n < 2 ,$$

et donc éléments de $\{0, \pm 1\}$, quel que soit $n < 8$.

On applique ce qui précède à un vecteur $x' \in M^\perp$ et à ses composantes dans la base $(e^*_{m+1}, \ldots, e^*_n)$ de $M^\perp$.

Pour $m = 2$, $M^\perp$ est semblable à A_2 et possède donc 3 couples de vecteurs minimaux. Mais $x = e^*_3 + e^*_4$ et $y = e^*_3 - e^*_4$ ne peuvent être simultanément minimaux («méthode des déterminants caractéristiques» de Korkine et Zolotareff: (x, y) et (e^*_3, e^*_4) doivent engendrer le même réseau), donc e^*_3 et e^*_4 sont minimaux. □

Nous passons maintenant au cas de la dimension $n = 4$. On utilise la classification de [B-M$_1$], § 5, où les réseaux engendrés par leurs vecteurs minimaux sont répartis en 18 classes (au sens du § 5) $a_4, a_5, b_5, \ldots, a_9, b_9, a_{10}, a_{12}$, les deux dernières étant formées des classes de similitude de A_4 et de D_4; la classe a_9 est décrite dans l'exemple 6.4, (2).

8.4. THÉORÈME. *Les réseaux normaux de dimension 4 possédant au moins 7 couples de vecteurs minimaux sont les réseaux de la classe a_9 ou sont semblables à D_4.*

8.5. COROLLAIRE. *Les réseaux isoduaux symplectiques σ-extrêmes sont les réseaux semblables à D_4.*

Démonstration de 8.5. On sait (prop. 8.1) qu'un tel réseau possède au moins 7 couples de vecteurs minimaux, et, d'après l'exemple 6.4,(2), l'invariant d'Hermite ne possède pas de maximum relatif sur la classe a_9. □

Démonstration de 8.4. Le cas d'un réseau possédant une section hyperplane critique de même norme résulte du th. 8.2, ce qui résoud le cas des classes d_7, b_8, b_9, a_{10} et a_{12}.

Il reste à examiner les réseaux L de l'une des classes a_7, b_7, c_7, a_8.

Le cas de la classe b_7 est facile. Elle est caractérisée par l'existence de 7 vecteurs minimaux répartis dans 3 réseaux A_2 ayant un vecteur minimal e en commun. D'après le th. 8.3, le réseau orthogonal à e dans L^* possède 3 sections minimales de type A_2, et donc 6 vecteurs minimaux. Il est donc semblable à A_3, et l'on conclut par le th. 8.2 appliqué à L^*.

Pour traiter les trois derniers cas, nous avons utilisé le théorème 8.3 complété par des calculs explicites de matrices adjointes, conduits en s'aidant du système *PARI*. Nous illustrons le procédé en traitant ci-dessous le cas de la classe a_8.

Il résulte de [B-M1], §5, que ces réseaux peuvent être définis dans une base (e_1, e_2, e_3, e_4) convenable par les matrices de Gram ci-dessous:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & t \\ -1 & 2 & u & -1 \\ -1 & u & 2 & -1 \\ t & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On trouve $N(e_1^*) - N(e_2^*) = 2(u-t)(1-u-t)$, expression qui doit être nulle puisque $\langle e_3, e_4 \rangle$ est un réseau de type A_2, cf. th. 8.3. Si $u = 1 - t$, on obtient des matrices représentant a_9. Si $u = t$, on trouve $\frac{1}{2}N(e_1^*) - e_1^* . e_2^* = (2-t)(2t-1)$ et $\frac{1}{2}N(e_1^*) + e_1^* . e_2^* = 3(2-t)$, expressions qui ne peuvent s'annuler que pour $t = \frac{1}{2}$ ($|t|$ ne peut pas dépasser la valeur 1), cas dans lequel on obtient le réseau $L_4^2 \in a_9$. □

8.6. REMARQUE. Nous avons recherché les réseaux normaux dans les classes c_6 et d_6 (ce qui couvre tous les cas où il y a deux sections minimales de type A_2). La classe c_6 n'en contient pas. La classe d_6 contient une famille à deux paramètres de réseaux normaux, qui sont en fait isoduaux de type symplectique. Le bord de cette famille est la classe $\overline{a_9} = a_9 \cup a_{12}$. Elle contient des sous-variétés de dimension 1 formées de réseaux isoduaux de type orthogonal. En tant que réseaux σ-isoduaux de type orthogonal, L_4^2 et D_4

sont σ-extrêmes pour chacun des systèmes de valeurs propres possibles. Ce sont probablement les seuls.

Nous avons également recherché les réseaux σ-isoduaux pour un σ de valeurs propres $(+1, +1, -1, -1)$ admettant une base de vecteurs minimaux conforme au lemme 7.1. Outre la famille ci-dessus, on trouve une famille à deux paramètres à la fois symplectique et orthogonale avec $s = 4$. Son bord est contenu dans l'adhérence de la première famille.

Voici des matrices de Gram pour chacune de ces deux familles (renormalisées à la norme 2):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & x & y \\ -1 & 2 & y & -x-y \\ x & y & 2 & -1 \\ y & -x-y & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & t & u \\ 0 & 2 & u & -t \\ t & u & 2 & 0 \\ u & -t & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[B-B] BACHOC, C. et C. BATUT. Etude algorithmique de réseaux construits avec la forme trace. *Exp. Math. 1* (1992), 183-190.

[Bar] BARNES, E.S. On a theorem of Voronoï. *Proc. Cambridge Phil. Soc. 53* (1957), 537-539.

[Ber] BERGÉ, A.-M. Minimal Vectors of Pairs of Dual Lattices. *J. Number Theory, 52* (1995), 284-298.

[B-M1] BERGÉ, A.-M. et J. MARTINET. Sur un problème de dualité lié aux sphères en géométrie des nombres. *J. Number Theory 32* (1989), 14-42.

[B-M2] BERGÉ, A.-M. et J. MARTINET. Réseaux extrêmes pour un groupe d'automorphismes, *Astérisque 198-200* (1992), 41-66.

[B-M3] BERGÉ, A.-M. et J. MARTINET. Sur la classification des réseaux eutactiques. *J. London Math. Soc.* (à paraître).

[Bou] BOURBAKI, N. *Groupes et algèbres de Lie.* Chapitres 2 et 3. Hermann, Paris.

[B-M-S] BERGÉ, A.-M., J. MARTINET et F. SIGRIST. Une généralisation de l'algorithme de Voronoï pour les formes quadratiques. *Astérisque 209* (1992), 137-158.

[B-S] BUSER, P. and P. SARNAK. On the period matrix of a Riemann surface of large genus (with an Appendix by J.H. Conway and N.J.A. Sloane). *Invent. math. 117* (1994), 27-56.

[Cas] CASSELS, J.W.S. *An Introduction to the Geometry of Numbers.* Springer-Verlag, Grundlehren n° 99, Heidelberg, 1959.

[C-S] CONWAY, J.H. and N.J.A. SLOANE. *Sphere Packings, Lattices and Groups.* Springer-Verlag, Grundlehren n° 290, Heidelberg, 1988.

[C-S1] CONWAY, J.H. and N.J.A. SLOANE. Low-dimensional lattices. III. Perfect forms. *Proc. Royal Soc. London A 418* (1988), 43-80.

[C-S2] CONWAY, J.H. and N.J.A. SLOANE. D_4, E_8, Leech and certain other lattices are symplectic. Appendix 2 to [B-S], 53-55.

[C-S3] CONWAY, J.H. and N.J.A. SLOANE. On Lattices Equivalent to Their Duals. *J. Number Theory, 48* (1994), 373-382.