

2.2 Invariants projectifs de quadruplets de sous-espaces de dimension $l-1$ de $\mathbb{P}^{2l-1}(F)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

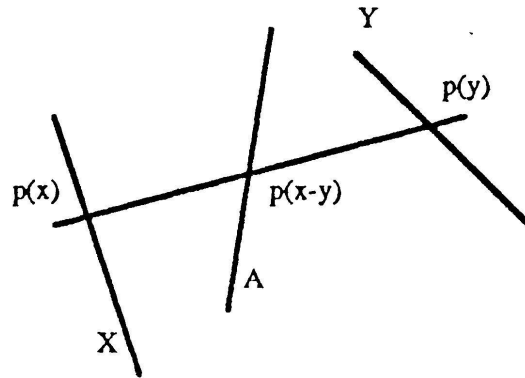


FIGURE 7

Il reste à voir que ψ respecte les relations. Soit E_1, E_2, E_3 en somme directe et soit de plus $u_1: E_1 \rightarrow E_2$ et $u_2: E_2 \rightarrow E_3$; posons pour $i = 1, 2$

$$J_i = \{u_i(x) - x : x \in E_i\}.$$

Comme

$$(u_2 \circ u_1)(x) - x = (u_2(u_1(x)) - u_1(x)) + (u_1(x) - x),$$

on a

$$\{(u_2 \circ u_1)(x) - x : x \in E_1\} \subset (J_1 \oplus J_2) \cap (E_1 \oplus E_2).$$

L'égalité résulte de l'égalité des dimensions. $\square$

2.2 INVARIANTS PROJECTIFS DE QUADRUPLÉTS DE SOUS-ESPACES DE DIMENSION $l - 1$ DE $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$

On peut formuler dans le cadre de ce qui précède des invariants projectifs de quatre sous-espaces de dimension $l - 1$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ qui généralisent le birapport de quatre points de $\mathbf{P}^1(F)$.

Pour cela, revenons au groupoïde $\mathcal{V}_{n,l}$. On considère la réunion disjointe des groupes d'automorphismes de $\mathcal{V}_{n,l}$

$$\mathbf{A} := \coprod_{\substack{\dim E = l \\ E \subset F^{n+1}}} GL(E).$$

Le groupe linéaire $GL(n+1, F)$ opère par conjugaison dans $\mathbf{A}$. Pour $f \in \mathbf{A}$, soit

$$X^l - a_1(f)X^{l-1} + \cdots + (-1)^l a_l(f),$$

son polynôme caractéristique. Les a_i sont des fonctions invariantes par l'action de $GL(n+1, F)$ sur $\mathbf{A}$. En composant ces fonctions avec l'isomorphisme de groupoïdes du théorème 3, on obtient pour $l \geq 1$ et $n \geq 3l-1$, des fonctions c_i sur

$$\coprod_{X \in \text{Obj}(\mathcal{G}_{n,l})} \text{Aut}(X)$$

qui sont invariantes par l'action du groupe projectif $PGL(n+1, F)$ sur $\mathcal{G}_{n,l}$.

On en déduit des invariants projectifs qui sont des analogues du birapport. Par exemple, si X, Y, A, B sont quatre sous-espaces projectifs de dimension $l-1$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$, tels que X, Y, A et X, Y, B soient respectivement en position générale, alors les éléments de F donnés par les $c_i((Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y))$ sont des invariants projectifs de la configuration constituée par ces quatre sous-espaces.

On sait que «en général» (au sens de la géométrie énumérative et pour un corps algébriquement clos, voir par exemple [6] p. 272 et [11] p. 206), si X, Y, A, B sont quatre sous-espaces de dimension $l-1$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ deux à deux disjoints, il existe exactement l droites $(\Delta_j)_{j=1, \dots, l}$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ qui rencontrent à la fois X, Y, A et B .

Supposons que X, Y, A, B soit une telle configuration; notons x_j, y_j, a_j, b_j les points d'intersection respectifs de Δ_j avec X, Y, A et B , et soit α_j le birapport $r(x_j, y_j; a_j, b_j)$. Alors, si le corps F a au moins $l+1$ éléments, les α_j sont deux à deux distincts et coïncident avec les valeurs propres de $(Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y)$, d'où les relations

$$c_i((Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y)) = \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_l),$$

où σ_i désigne la i -ième fonction symétrique élémentaire de l variables.

En effet notons E le sous-espace de dimension l de F^{2l} tel que $p(E \setminus \{0\}) = X$ dans la projection de $F^{2l} \setminus \{0\}$ sur $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$; soit D_j la droite de E au-dessus de x_j ; soit de plus f l'élément de $GL(E)$ correspondant à $(Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y)$. En reprenant des arguments contenus dans les preuves des théorèmes 2 et 3, on montre qu'une droite vectorielle D de E est une droite propre de f si et seulement si il existe une droite (unique) Δ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ passant par le point $x := p(D \setminus \{0\})$ et rencontrant Y, A , et B ; de plus la valeur propre correspondante est le birapport $r(x, y; a, b)$, où y, a, b sont les points d'intersection de Δ avec Y, A , et B . On voit donc que les α_j sont valeurs propres de f ; de plus ces valeurs propres sont deux à deux distinctes, sinon f admettrait un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2, ce qui entraînerait l'existence d'au moins $\text{card}(\mathbf{P}^1(F))$

$= \text{card}(F) + 1$ droites distinctes de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ rencontrant X, Y, A , et B , mais $\text{card}(\mathbf{P}^1(F)) > l$, par hypothèse sur F . Il en résulte que f est diagonalisable et que les x_j sont en position générale dans X , car les D_j sont en somme directe.

On peut aussi montrer que les birapports α_j donc aussi les c_j caractérisent, dans la situation ci-dessus, la configuration X, Y, A, B à transformation projective près.

3. HOMOLOGIE DU GROUPE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

3.1 HOMOLOGIE DU GROUPE MULTIPLICATIF D'UN CORPS ET ESPACE PROJECTIF INFINI

A la place des configurations de Menelaüs, on aurait pu utiliser dans la définition du groupoïde $\mathcal{G}_n$ les configurations de Ceva comme sur la figure 8.

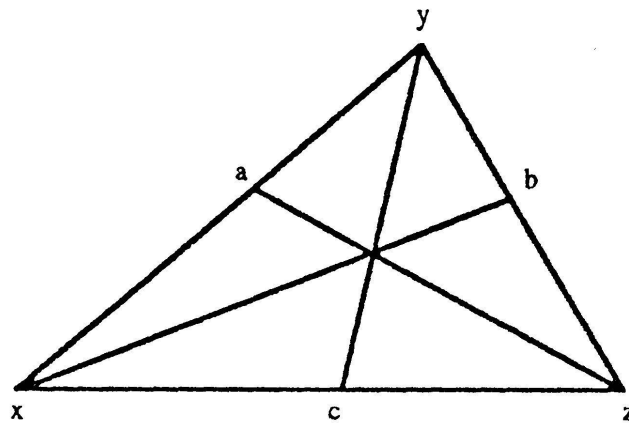


FIGURE 8

On rappelle que le théorème de Ceva exprime le fait que les droites $\langle x, b \rangle$, $\langle y, c \rangle$ et $\langle z, a \rangle$ de la figure 8 sont concourrantes par la condition affine $\frac{ax}{ay} \frac{by}{bz} \frac{cz}{cx} = -1$.

DÉFINITION 5. On note $\mathcal{G}'_n$ le groupoïde ainsi obtenu.

Le groupoïde $\mathcal{G}'_n$ est isomorphe à $\mathcal{G}_n$. L'isomorphisme avec $\mathcal{V}_n$ est d'ailleurs plus naturel que son analogue pour $\mathcal{G}_n$. Si F est de caractéristique 2, on a l'égalité $\mathcal{G}'_n = \mathcal{G}_n$; en effet les points a, b, c de la figure 8 sont alors alignés et dans ce cas les configurations de Menelaüs et celles de Ceva coïncident. Noter aussi que sans hypothèse sur F , on obtient un isomorphisme entre $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{G}'_n$, en termes de générateurs, en associant au générateur $(x \xrightarrow{a} y)$ de $\mathcal{G}_n$, le générateur $(x \xrightarrow{a'} y)$ de $\mathcal{G}'_n$, où a' est le