

Objektyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

## ON THE COHOMOLOGY OF COMPACT LIE GROUPS

by Mark REEDER

ABSTRACT. We give a new computation of the cohomology of a Lie group that some mathematicians may find to be shorter and more elementary than previous approaches. The main new ingredient is a result of L. Solomon on differential forms invariant under a finite reflection group. The cohomology is shown to have a bi-grading which has several interpretations.

### 1. INTRODUCTION

Let  $G$  be a compact connected Lie group, and let  $T$  be a maximal torus in  $G$ . We denote the corresponding Lie algebras by  $\mathfrak{g}$  and  $\mathfrak{t}$ . Let  $W$  be the Weyl group of  $T$  in  $G$ . Then  $W$  acts on  $\mathfrak{t}$  as a group generated by reflections about the kernels of the roots of  $\mathfrak{t}$  in  $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}$ . It has been known since the first half of this century that the cohomology ring  $H(G)$ , with real coefficients, is an exterior algebra with generators in degrees  $2m_1 + 1, \dots, 2m_l + 1$ , where  $m_1 + 1, \dots, m_l + 1$  are the degrees of homogeneous generators of the ring of  $W$ -invariant polynomial functions on  $\mathfrak{t}$ . In particular, the Poincaré polynomial of  $G$  is  $(1 + t^{2m_1+1}) \cdots (1 + t^{2m_l+1})$ , and  $G$  has the cohomology of a product of odd-dimensional spheres.

Despite its age and familiarity, it is not easy to find a proof of this theorem in the literature. There are many beginnings and sketches in the textbooks, but the difficult part, namely the remarkable connection between degrees of invariant polynomials and Betti numbers, usually goes unproven. One reason is that the standard proofs (for example, [Bo2], [Ch], [L]) require substantial algebraic preliminaries on Hopf algebras, spectral sequences, and differential algebras. (See [Bo1] and [Sam] for historical surveys.)

We offer here a new but less sophisticated computation of the cohomology of a Lie group, avoiding the above algebraic techniques. Instead we use