Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 40 (1994)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR LA SURFACE MODULAIRE

Autor: Arnoux, Pierre

Kapitel: 4. Un système de coordonnées sur l'espace des réseaux

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61103

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

fait que la méthode de Minkowski donne pour chaque réseau deux bases opposées l'une de l'autre; les réseaux pour lesquels cette méthode fournit plus de deux bases (réseaux carrés et hexagonaux) sont projetés sur les deux points singuliers de la surface modulaire.

4. Un système de coordonnées sur l'espace des réseaux

Nous allons définir une autre méthode pour fixer des coordonnées, qui conduit à des calculs plus faciles. Etant donné un réseau dans $\mathbf{R}^2$ (identifié à $\mathbf{C}$ pour la commodité de notation), on définit pour chaque point x du réseau l'intervalle horizontal ouvert $H_x =]x-1, x+1[$. La demi-droite verticale issue de x recoupe au moins un autre intervalle horizontal: en effet, soit le réseau contient un vecteur vertical, et cette demi-droite rencontre un autre point du réseau, soit il n'en contient pas, donc les deux vecteurs d'une base du réseau ont des abscisses rationnellement indépendantes, et il y a des points du réseau arbitrairement proches de la demi-droite.

Soit H_y le premier intervalle rencontré, et supposons que le point de rencontre soit à gauche de y. Ce point de rencontre peut s'écrire $x + ic = y - a$; on appellera V_x l'intervalle vertical $[x, x+ic[$ qu'il définit. On prolonge ensuite vers la droite tous les intervalles horizontaux jusqu'à rencontrer un intervalle vertical, ce qui est toujours possible par un raisonnement du même type que ci-dessus. Par symétrie, pour tout intervalle V_x, il existe un seul H_z dont le prolongement le coupe; on écrira $z + b = x + id$ le point d'intersection. Il est clair que (a, c) et $(-b, d)$ sont des vecteurs du réseau, et on vérifie sans peine qu'ils forment une base (cf. Fig. 4; en fait, cette construction donne un domaine fondamental pour le réseau formé de deux rectangles, l'un de base a et de hauteur d, l'autre de base b et de hauteur c). On vérifie immédiatement que l'on a, par construction, $0 < a < 1 \leqslant b$ et $0 \leqslant d < c$.

Si le premier point de rencontre avec H_y est à droite de y, on peut faire la construction symétrique, et on obtient une base (a, c), $(-b, d)$ avec $0 < b < 1 \leqslant a$ et $0 \leqslant c < d$.

Cette construction tombe en défaut dans deux cas:

— si le premier point d'intersection est égal à y; dans ce cas le réseau contient un vecteur vertical, et on peut trouver une base de la forme $(0, c)$, $(-b, d)$ avec $d < c$, $b \geqslant 1$ (et aussi une base de la forme (a, c), $(0, d)$ avec $c < d$, $a \geqslant 1$);

— si le premier point d'intersection est contenu dans deux intervalles horizontaux, et dans ce cas le réseau contient un vecteur horizontal, et il y a une base de la forme $(a, 0)$, $(-b, d)$, avec $b < a < 1$.

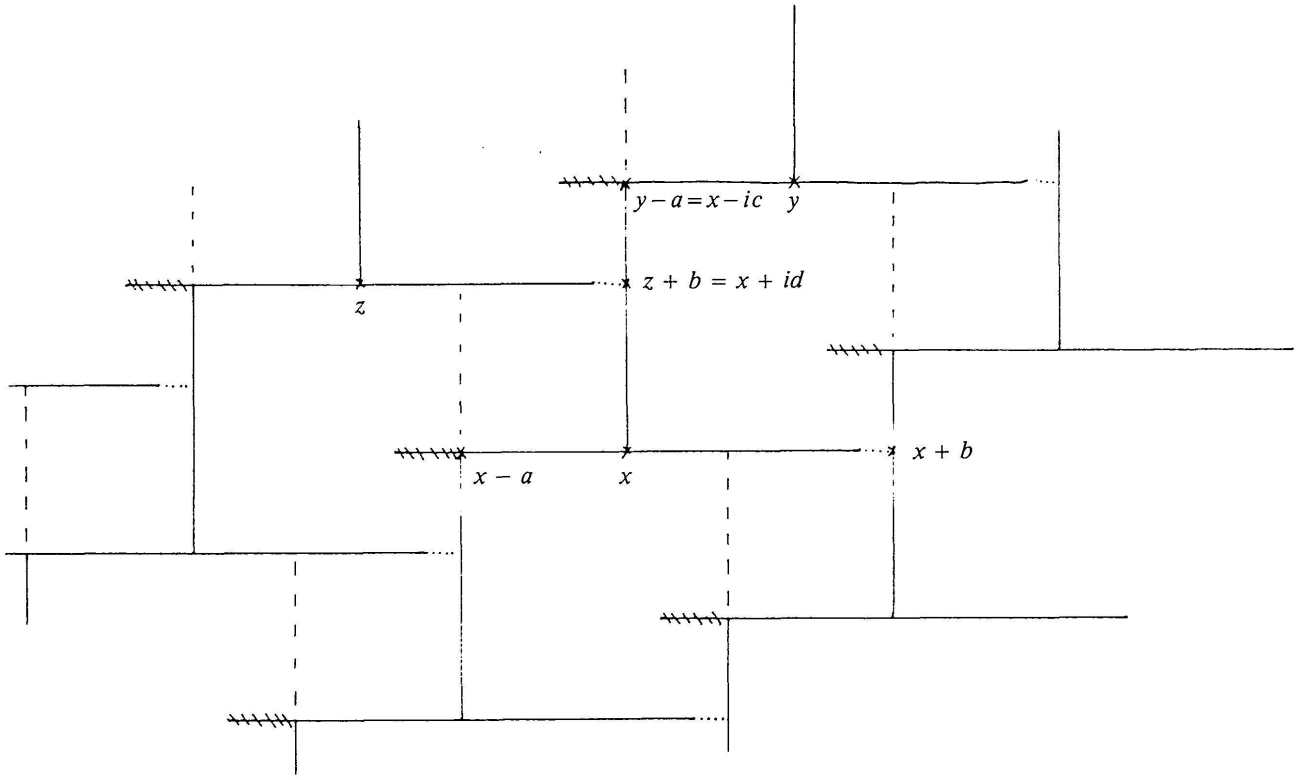

FIGURE 4

On peut remarquer que le premier cas correspond à des points dont l'orbite positive tend vers l'infini sur la surface modulaire, et le second cas à des points dont l'orbite négative tend vers l'infini; par exemple, une base de la forme $(0, c)$, $(-b, d)$ devient $(0, ce^{-t/2})$, $(-be^{t/2}, de^{-t/2})$ sous l'action du flot géodésique, et l'application ϕ définie ci-dessus lui fait correspondre le nombre complexe $d/c + ie^t b/c$, qui est contenu dans le domaine fondamental donné ci-dessus dès que $d/c < 1/2$ et tend vers l'infini.

Pour résumer, nous avons montré qu'il existe un domaine fondamental pour l'action à gauche de $SL(2, \mathbf{Z})$ sur $SL(2, \mathbf{R})$ formé de matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ -b & d \end{pmatrix}$, où (a, b, c, d) appartient à l'un des 3 ensembles suivants:

$$\Omega_0 = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid ad + bc = 1, 0 < b < 1 \leqslant a, 0 \leqslant c < d\}$$
$$\Omega_1 = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid ad + bc = 1, 0 \leqslant a < 1 \leqslant b, 0 \leqslant d < c\}$$
$$\Omega_2 = \{(a, b, 0, d) \in \mathbf{R}^4 \mid ad = 1, 0 < b < a < 1\}.$$

Le choix pour les inégalités strictes ou larges sur les bords de Ω_0 et Ω_1 est assez arbitraire, puisqu'il y a des identifications entre les bords; en particulier le bord $a = 0$ de Ω_0 s'identifie au bord $b = 0$ de Ω_1, l'identification étant donnée par la formule:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ -a & \frac{1}{a} - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}.$$

Il peut être utile d'interpréter ces domaines de la façon suivante: tout réseau ne contenant pas de vecteur horizontal possède un unique domaine fondamental formé de deux rectangles alignés, le plus étroit étant de largeur inférieure à 1, le plus large étant plus haut que l'autre, et de largeur supérieure à 1 (cf. Fig. 4). On peut alors prendre comme coordonnées les deux largeurs et la plus petite des hauteurs; l'autre s'en déduit puisque l'aire du domaine fondamental est 1. On retrouve le fait, évident sur les équations, que les domaines Ω_0 et Ω_1 sont de dimension 3; Ω_0 (resp. Ω_1) correspond au cas où c'est le rectangle de droite (resp. de gauche) qui est le plus grand. Quant à Ω_2, il correspond aux réseaux contenant un vecteur horizontal petit; le plus petit rectangle est alors de hauteur nulle, et l'on ne peut plus assurer que la largeur du plus grand rectangle soit supérieure à 1.

5. Le codage du flot géodésique

Dans ces coordonnées, le flot géodésique s'écrit simplement, du moins localement:

$$g_t(a, b, c, d) = (e^{t/2}a, e^{t/2}b, e^{-t/2}c, e^{-t/2}d) .$$

Mais pour t assez grand, les deux premières coordonnées sont plus grandes que 1 (sauf dans le cas particulier où l'une d'entre elles est initialement nulle), et l'on traverse le bord du domaine fondamental; il faut alors faire une identification pour poursuivre l'orbite à partir d'une autre face. Pour décrire complètement le flot, il faut étudier cette identification.

Le domaine Ω_0 peut être paramétré par les 3 coordonnées a, b, c, puisque $d = (1 - bc)/a$, et plongé dans $\mathbf{R}^3$ (cf. Fig. 5); il possède alors cinq bords, dont trois, donnés respectivement par les équations $b = 0$, $c = 0$, $c = 1/(a + b)$, sont formés de segments d'orbites du flot géodésique. Les deux derniers sont Σ_0, d'équation $a = 1$, sur lequel le flot est rentrant, et Λ_0, d'équation $b = 1$, sur lequel le flot est sortant. Le bord Σ_0 peut être paramétré par (b, c), avec $b \in [0, 1[$ et $c \in [0, 1/(b + 1)[$; on reconnaît le domaine Σ du paragraphe 1. Le bord Λ_0 peut, lui, être paramétré par (a, c), avec $a > 1$ et $c \in [0, 1/(a + 1)[$.

On peut de même paramétrer Ω_1, cette fois par (a, b, d), et définir un bord rentrant Σ_1, paramétré par (a, d), et un bord sortant Λ_1, paramétré par (b, d).