VI. Cas d'un groupe libre à plus de deux générateurs

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

en ayant tenu compte des relations $\lambda(0,0,0) = -4$ et $\lambda'(0,0,0) = 0$. La conclusion résulte de $\lambda''(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Prenons un exemple: $\sigma = (aba^2b^2a, aba^3bab)$. Calculons $\Phi_\sigma(0,0,z)$. La réduction de σ donne $(aba, -(ab)^3)$ donc

$$\Phi_\sigma(0,0,z) = (0, -t_3(z), 0) = (0, 3z - z^3, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0,0,z) = u_3(z)^2 = (z^2-1)^2 .$$

Pour calculer $\Phi_\sigma(x,0,0)$, multiplions σ par (ab, b^{-1}), on obtient $(babab, bab)$, qui est réduit. Donc

$$\Phi_\sigma(x,0,0) = (0,0,-t_1(x)) = (0,0,-x)$$

et

$$Q_\sigma(x,0,0) = u_1(x)^2 = 1 .$$

De façon analogue, on obtient

$$\Phi_\sigma(0,y,0) = (p_3(y),0,0) = (y^3 - 3y, 0, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0,y,0) = (y^2-1)^2 .$$

Ensuite on a

$$-2Q''_\sigma(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - I$$

d'où

$$Q''_\sigma(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

VI. Cas d'un groupe libre à plus de deux générateurs

Avant de passer à la généralisation partielle de ce qui précède, nous avons besoin d'un certain nombre de lemmes sur $SL(2, \mathbf{C})$.

LEMME 1. *Soit* A *et* B *deux éléments de* $SL(2, \mathbf{C})$. *On a*

$$ABA = A \operatorname{tr} AB - B^{-1}$$

et
$$\operatorname{tr}(ABA) = (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} AB) - (\operatorname{tr} B) .$$

Démonstration. On a, par Cayley-Hamilton, $AB + (AB)^{-1} = \operatorname{tr} AB$, d'où

$$ABA + B^{-1} = A \operatorname{tr} AB .$$

LEMME 2 (Formule de Fricke). *Si* A *et* B *sont deux éléments de* $SL(2, \mathbf{C})$, *on a*

$$\operatorname{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = (\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B)(\operatorname{tr} AB) - 2 .$$

Démonstration. Une utilisation répétée du théorème de Cayley-Hamilton suivie de celle du lemme précédent donne

$$\begin{aligned} ABA^{-1}B^{-1} &= AB(\operatorname{tr} AB - BA) \\ &= AB \operatorname{tr} AB - A(B \operatorname{tr} B - 1)A \\ &= AB \operatorname{tr} AB - (A \operatorname{tr} AB - B^{-1}) \operatorname{tr} B + A \operatorname{tr} A - 1 \end{aligned}$$

d'où le résultat, en prenant les traces des deux membres.

Considérons maintenant trois éléments A_1, A_2, A_3 de $SL(2, \mathbf{C})$ dont les traces sont respectivement x_1, x_2 et x_3. On note y_1, y_2 et y_3 les traces de A_2A_3, A_3A_1 et A_1A_2.

LEMME 3. *On a* $\operatorname{tr} A_1A_2A_3 + \operatorname{tr} A_1A_3A_2 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1x_2x_3$.

Démonstration. En vertu du lemme I.1, on a

$$A_2A_3 + A_3A_2 = y_1 - x_2x_3 + x_3A_2 + x_2A_3$$

d'où

$$A_1A_2A_3 + A_1A_3A_2 = (y_1 - x_2x_3)A_1 + x_3A_1A_2 + x_2A_1A_3 ,$$

d'où le résultat.

LEMME 4. *On a*

$$\begin{aligned} &(\operatorname{tr} A_1A_2A_3)(\operatorname{tr} A_1A_3A_2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_2^3 - x_1x_2y_3 - x_2x_3y_1 - x_3x_1y_2 + y_1y_2y_3 - 4 . \end{aligned}$$

Démonstration. Utilisant le lemme 1 de deux façons, on obtient

$$\begin{aligned} A_1A_2A_3A_1A_3A_2 &= (A_1 \operatorname{tr}(A_1A_2A_3) - A_3^{-1}A_2^{-1})A_3A_2 \\ &= A_1A_2(y_2A_3 - A_1^{-1})A_2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} A_1A_3A_2 \operatorname{tr}(A_1A_2A_3) &= A_3^{-1}A_2^{-1}A_3A_2 + y_2A_1A_2A_3A_2 - A_1A_2A_1^{-1}A_2 \\ &= A_3^{-1}A_2^{-1}A_3A_2 + y_2A_1(y_1A_2 - A_3^{-1}) \\ &\quad - A_1(A_2 \operatorname{tr}(A_2A_1^{-1}) - A_1) \\ &= A_3^{-1}A_2^{-1}A_3A_2 + y_2A_1(y_1A_2 - x_3 + A_3) \\ &\quad - A_1A_2(x_1x_2 - y_3) + x_1A_1 - 1 , \end{aligned}$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 5. *Les nombres* $\operatorname{tr}(A_1A_2A_3)$ *et* $\operatorname{tr}(A_1A_3A_2)$ *sont les racines de l'équation suivante, dont l'inconnue est* z*:*

$$z^2 - p(X, Y)z + q(X, Y) = 0$$

où

$$p(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1x_2x_3$$

et

$$\begin{aligned} q(X, Y) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - x_1x_2y_3 - x_2x_3y_1 \\ - x_3x_1y_2 + y_1y_2y_3 - 4 . \end{aligned}$$

Nous venons de définir les polynômes p et q en les variables $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$. Posons

$$\Lambda(X, Y, z) = z^2 - p(X, Y)z + q(X, Y) .$$

PROPOSITION 6. *Le polynôme* Λ *est irréductible dans* $\mathbf{C}[X, Y, z]$.

Démonstration. Si Λ était décomposable, le polynôme $p^2 - 4q$ serait un carré dans $\mathbf{C}[X, Y]$. Il en serait de même du polynôme $(p^2 - 4q)\ (0, 0, 0, y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbf{C}[y_1, y_2, y_3]$. Or $(p^2 - 4q)\ (0, 0, 0, y_1, y_2, y_3)$ est de degré 3, c'est donc impossible.

Notons V la sous-variété algébrique de $\mathbf{C}^7$, ensemble des zéros de Λ. Elle est irréductible.

Désignons par T l'application de $[SL(2, \mathbf{C})]^3$ dans $\mathbf{C}^7$ ainsi définie:

$$T(A_1, A_2, A_3) = (\operatorname{tr} A_1, \operatorname{tr} A_2, \operatorname{tr} A_3, \operatorname{tr} A_2A_3, \operatorname{tr} A_3A_1, \operatorname{tr} A_1A_2, \operatorname{tr} A_1A_2A_3) .$$

Il résulte du corollaire 5 que l'image de T est contenue dans la variété V.

PROPOSITION 7. *L'image de T est la variété V.*

Démonstration. Donnons-nous un point $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z) \in V$. Nous avons à construire trois matrices A_1, A_2, A_3 telles que $T(A_1, A_2, A_3) = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z)$. Nous allons distinguer plusieurs cas

— l'une des expressions $\lambda(x_1, x_2, y_3)$, $\lambda(x_2, x_3, y_1)$, $\lambda(x_3, x_1, y_2)$ n'est pas nulle.

Traitons le cas où $\lambda(x_1, x_2, y_3) \neq 0$. Prenons

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\tau^{-1} \\ \tau & x_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} t & u \\ v & x_3 - t \end{pmatrix}.$$

Nous devons en outre avoir

$$\begin{aligned} &tx_1 + v - u = y_2 \\ &-\tau^{-1}v + \tau u + x_2(x_3 - t) = y_1 \\ &\tau t + (x_2 - \tau^{-1}x_1)v + \tau^{-1}(x_3 - t) = z \\ &\tau + \tau^{-1} = y_3 \\ &t(x_3 - t) - uv = 1 . \end{aligned}$$

Les trois premières équations forment un système linéaire en t, u, v dont le déterminant, compte tenu de la quatrième équation, vaut $-\lambda(x_1, x_2, y_3)$, qui est non nul par hypothèse. La compatibilité avec la dernière équation est assurée par la relation

$$\Lambda(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z) = 0 .$$

— $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = 0$ et l'un au moins des $|x_i|$ est différent de 2.

Traitons le cas $|x_1| \neq 2$.

On vérifie que l'on peut prendre les trois matrices soit sous la forme

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ w & v^{-1} \end{pmatrix},$$

soit sous la forme

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 1 & u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & w \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}.$$

— Enfin dans le dernier cas, on peut choisir pour A_1, A_2, A_3 les matrices $\pm I$, $\pm I$, $\pm I$.

PROPOSITION 8. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. A_1, A_2, A_3 *ont une direction propre commune.*
2. $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = 0$ *et* $\operatorname{tr} A_1 A_2 A_3 = \operatorname{tr} A_1 A_3 A_2$.
3. $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = \delta(X, Y) = 0$

où $\delta = p^2 - 4q$.

Démonstration. Clairement les assertions 2 et 3 sont équivalentes et sont impliquées par la première.

Supposons donc que l'on ait $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = 0$ et que A_1, A_2, A_3 n'aient pas de direction propre commune. Comme les opérateurs A_1, A_2, A_3 ont deux à deux une direction propre commune, on peut dans une base convenable les représenter par des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & \xi \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v & 0 \\ \zeta & v^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \zeta\xi \neq 0 \quad \text{et} \quad t \neq \pm 1 \, .$$

On vérifie alors que $\operatorname{tr} A_1 A_2 A_3 = tuv + (tuv)^{-1} + \zeta\xi t$ et $\operatorname{tr} A_1 A_3 A_2 = tuv + (tuv)^{-1} + \zeta\xi t^{-1}$. Et donc $\operatorname{tr} A_1 A_2 A_3 \neq \operatorname{tr} A_1 A_3 A_2$. Ceci achève la démonstration.

Nous pouvons maintenant envisager de généraliser la section I au cas d'un groupe libre ayant un nombre fini de générateurs. Nous considérons d'abord le cas de F_3, le groupe libre engendré par a_1, a_2, a_3. Si φ est un homomorphisme de F_3 dans $SL(2, \mathbf{C})$, nous poserons

$$T\varphi = T(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \varphi(a_3)) \, .$$

PROPOSITION 9. *Si* $w \in F_3$, *il existe un polynôme* $P \in \mathbf{Z}[X, Y, z]$, *unique modulo* Λ, *tel que pour tout* $\varphi \in \operatorname{Hom}(F_3, SL(2, \mathbf{C}))$ *on ait*

$$\operatorname{tr}(w) = P(T\varphi) \, .$$

Démonstration. L'existence se démontre par application répétée du théorème de Cayley-Hamilton et du lemme I.1. L'unicité résulte de la proposition 7.

THÉORÈME 10. *Si* σ *est un endomorphisme de* F_3, *il existe une unique application polynomiale* Φ_σ *de* V *dans* V *telle que, pour tout* $\varphi \in \operatorname{Hom}(F_3, SL(2, \mathbf{C}))$ *on ait*

$$T(\varphi \circ \sigma) = \Phi_\sigma(T\varphi) \, .$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente aux éléments $\sigma(a_1)$, $\sigma(a_2)$, $\sigma(a_3)$, $\sigma(a_2 a_3)$, $\sigma(a_3 a_1)$, $\sigma(a_1 a_2)$ et $\sigma(a_1 a_2 a_3)$ de F_3.

COROLLAIRE 11. *Si* σ *et* τ *sont deux endomorphismes de* F_3, *et si l'on pose* $\sigma\tau = \tau \circ \sigma$, *on a* $\Phi_{\sigma\tau} = \Phi_\sigma \circ \Phi_\tau$.

PROPOSITION 12. *Soit* Ω *la sous-variété de* V *définie par* $\Lambda(X, Y, z) = 0$, $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = \delta(X, Y) = 0$. *Alors* Ω *est invariante par toute application* Φ_σ.

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 8.

Les calculs sur F_n, le groupe libre engendré par $a_1, a_2, \cdots, a_n$, sont moins explicites. Soit I l'ensemble des parties non vides de $\{1, 2, \cdots, n\}$. Un élément i de I est la donnée de ses éléments $i_1, i_2, \cdots, i_k$ ordonnés en croissant. Pour chaque $\varphi \in \mathrm{Hom}(F_n, SL(2, \mathbf{C}))$, on note $T\varphi$ la collection $\{\mathrm{tr}\, \varphi(a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k})\}_{i \in I}$, qui ne dépend que de la classe de la représentation φ. On sait que l'ensemble des classes de représentations est une variété algébrique [2]. Sa dimension est $3(n-1)$. On peut le voir en observant que, sauf cas exceptionnels, on peut, étant donné $\varphi \in \mathrm{Hom}(F_n, SL(2, \mathbf{C}))$, fixer une base de $\mathbf{C}^2$ de façon que les matrices de $\varphi(a_1)$ et $\varphi(a_2)$ aient la forme $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -t^{-1} \\ t & x_2 \end{pmatrix}$. Les autres éléments $\varphi(a_3), \cdots, \varphi(a_n)$ dépendent alors de $3(n-2)$ paramètres. Une application répétée du théorème de Cayley-Hamilton et de la proposition I.1 montre alors l'analogue de la proposition 9: étant donné $w \in F_n$, il existe un polynôme $P \in \mathbf{Z}[(x_i)_{i \in I}]$, unique modulo un certain idéal définissant une sous-variété algébrique de dimension $3(n-1)$ de $\mathbf{C}^I$, tel que, pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}(F_n, SL(2, \mathbf{C}))$, on ait $\mathrm{tr}\, \varphi(w) = P(T\varphi)$.

Pour chaque $\sigma \in \mathrm{End}(F_n)$ on définit de même que précédemment une application Φ_σ. Les applications Φ_σ laissent invariante une variété (celle qui est définie, en termes de traces, par le fait que n matrices 2×2 aient une direction propre commune).

Des résultats analogues sur F_n ont déjà été obtenus par Kolar et Nori [4]. On doit cependant observer qu'ils utilisent beaucoup trop de variables et qu'ils ne se sont pas préoccupés des questions d'unicité.

Dans deux articles à venir, l'un des auteurs donne un procédé général pour obtenir des relations entre les traces de matrice $p \times p$ et de leurs produits et traite le cas où au lieu de considérer les représentations d'un groupe libre dans $SL(2, \mathbf{C})$ on envisage des représentations dans $SL(3, \mathbf{C})$.

Terminons par une dernière remarque. Au lieu de considérer des représentations de F dans $SL(2, \mathbf{C})$, on peut utiliser des représentations dans $GL(2, \mathbf{C})$. En effet, à cause de l'homogénéité, le lemme I.1 est valable sans restriction sur les déterminants. Par ailleurs, pour une matrice 2×2, A, le théorème de Cayley-Hamilton s'écrit

$$A^2 - A(\operatorname{tr} A) + \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2\right] = 0 .$$

Donc, si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont n matrices 2×2 inversibles, par une méthode analogue à celle que nous avons développée, tout produit de la forme $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_k^{n_k}$ (avec $n_j \in \mathbf{Z}$ et $X_j \in \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ pour $j = 1, 2, \cdots, n$) a une trace qui s'exprime comme fraction rationnelle à coefficients entiers en les traces des produits $\{A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\}_{i \in I}$ et les traces des matrices $\{A_j^2\}_{j = 1, 2, \cdots, n}$.

NOTE AJOUTÉE SUR ÉPREUVES

Au moment de corriger les épreuves, les auteurs ont eu connaissance d'un certain nombre de travaux antérieurs ([9] à [16]) sur le même sujet.

L'existence de P_ω a été prouvée par Horowitz [9]. L'application induite Φ_σ a été considérée (seulement dans le cas où σ est un isomorphisme) également par Horowitz [10] qui a aussi déterminé le noyau de Φ. La considération du polynôme Q_σ est nouvelle. Le lemme 2 de la section II se trouve dans [15].

Certaines démonstrations données ici sont plus simples que celles de Horowitz, bien qu'il y ait des recouvrements. Alors que Horowitz n'utilise que des relations entre traces, nos calculs prennent place dans l'algèbre introduite par Procesi [13] et Razmyslov [14], ce qui simplifie considérablement les calculs. D'ailleurs, Magnus [12] fait allusion à la complexité des démonstrations de certaines identités (par exemple, les lemmes 3 et 4 de la section VI) et demande s'il est possible de les simplifier. Signalons qu'une description complète de l'idéal des relations entre traces a été donnée par Whittemore [16] dans le cas d'un groupe libre à quatre générateurs.

Les articles [11], [13] et [14] traitent des identités pour les matrices $n \times n$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ALLOUCHE, J.-P. et J. PEYRIÈRE. Sur une formule de récurrence sur les traces de produits de matrices associées à certaines substitutions. *C. R. Acad. Sc. Paris 302* (II) (1986), 1135-1136.

[2] CULLER, Marc and Peter B. SHALEN. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math. 117* (1983), 109-146.

[3] KOLAR, M. and M. K. ALI. Preprint, University of Lethbridge, January 22, 1990; Trace maps associated with general two-letter substitution rules. *Phys. Rev. A,* submitted.