V. Autres propriétés des polynômes Qa

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Démonstration. On peut évidemment supposer que l'on a $d^0\psi_1 \leqslant d^0\psi_2 \leqslant d^0\psi_3$. La relation $\lambda \circ \psi = 0$ s'écrit $\psi_3(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = 4 - \psi_1^2 - \psi_2^2$, d'où l'on déduit $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \leqslant d^0\psi_2$. Supposons que l'on ait $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \geqslant d^0\psi_3$. On a alors $d^0\psi_2 = d^0\psi_3$ et $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3 \leqslant 2d^0\psi_3$ et, donc, $\psi_1 = c \in R$. Par une procédure de descente analogue à celle de la démonstration du théorème II.4, par composition par divers Φ_τ on peut faire décroître $\deg\psi$ tant que l'une de ses composantes n'est pas constante.

THÉORÈME 5. *Pour* $\sigma \in \operatorname{Hom}(F, F)$, $Q_\sigma \equiv 0$ *si et seulement si* σ *n'est pas injectif.*

Démonstration. Supposons σ non injectif. En vertu de la proposition 3, il existe $\mu \in \operatorname{Aut} F$ tel que $\sigma\mu(b) = e$. Or, on sait que $Q_{\sigma\mu} = Q_\mu Q_\sigma \circ \Phi_\mu$. Or, il est facile de vérifier que $Q_{\sigma\mu} = 0$. Comme $Q_\mu \equiv 1$, cela implique $Q_\sigma \equiv 0$.

Supposons maintenant que l'on ait $Q_\sigma \equiv 0$. En vertu du lemme précédent, il existe $\tau \in \operatorname{Aut} F$ tel que la première composante de $\Phi_{\tau\sigma}$ soit constante. Le lemme II.2 montre alors que $\tau\sigma(a) = e$, ce qui prouve que σ n'est pas injective.

V. AUTRES PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES Q_σ

THÉORÈME 1. *Pour tout* $\sigma \in \operatorname{End} F$, *on a les faits suivants:*

1°) $Q_\sigma(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\det\sigma)^2$ *pour tous* $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$.

2°) λ *divise le polynôme* $\det\Phi'_\sigma - (\det\sigma)Q_\sigma$.

Démonstration. Observons d'abord que si p et q sont deux entiers rationnels on a

$$P_{a^pb^q}(x, y, z) = zu_p(x)u_q(y) - xu_p(x)u_{q-1}(y) - yu_{p-1}(x)u_q(y) + 2u_{p-1}(x)u_{q-1}(y)\,.$$

Si ε et η valent ± 1, il est facile de vérifier que

$$P_{a^pb^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = 2\varepsilon^p\eta^q$$

et de calculer le gradient de $P_{a^pb^q}$:

$$P'_{a^pb^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\varepsilon p(p-q), \eta q(q-p), \varepsilon\eta pq)\varepsilon^p\eta^q\,.$$

Considérons maintenant un élément de σ de $\operatorname{End} F$ dont la matrice est $\tilde\sigma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Ce qui précède montre que le point $(2, 2, 2)$ est point fixe pour Φ_σ et que l'ensemble $\{(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta); \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}\}$ est globalement invariant par Φ_σ.

Démontrons la première assertion. Différentions deux fois la relation $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$ au point $\omega = (2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta)$. On obtient

$$ {}^t\Phi'_\sigma(\omega)\lambda''(\Phi(\omega))\Phi'_\sigma(\omega) = \lambda''(\omega)Q_\sigma(\omega) $$

en ayant tenu compte de ce que $\lambda(\omega), \lambda'(\omega)$ et $\lambda'(\Phi_\sigma(\omega))$ sont nuls. Par ailleurs, $\Phi_\sigma - (P_{a^p b^q}, P_{a^r b^s}, P_{a^{p+r} b^{q+s}})$ est un multiple de λ. Par conséquent, on obtient $\Phi'_\sigma(\omega)$ en différentiant en ω la fonction $(P_{a^p b^q}, P_{a^r b^s}, P_{a^{p+r} b^{q+s}})$. Tous calculs faits on obtient la première assertion.

Pour démontrer la seconde assertion, nous allons montrer que le polynôme $\det \Phi'_\sigma - (\det \sigma) Q_\sigma$ s'annule en suffisamment de points de Ω.

Considérons le point $\omega(t, u) = (2\cos t, 2\cos u, 2\cos(t+u))$ de Ω. Son image par Φ_σ est le point $\omega(pt + qu, rt + su)$ que nous noterons $\omega \circ \tilde{\sigma}(t, u)$.

Par différentiation de la relation $\Phi_\sigma \circ \omega = \omega \circ \tilde{\sigma}$, on obtient

$$ (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} \wedge (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} = (\det \sigma) \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \circ \tilde{\sigma} \right) \wedge \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \circ \tilde{\sigma} \right) . $$

Par ailleurs, on établit facilement la relation

$$ \frac{\partial \omega}{\partial t} \wedge \frac{\partial \omega}{\partial u} = -\lambda' \circ \omega $$

où l'on a fait les identifications nécessaires.

La relation $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$ donne par différentiation, en observant que $\lambda \circ \omega = 0$,

$$ (\lambda' \circ \Phi_\sigma \circ \omega)(\Phi'_\sigma \circ \omega) V = (Q_\sigma \circ \omega)(\lambda' \circ \omega) \cdot V $$

où V est un vecteur arbitraire. Compte tenu des relations précédentes, ceci s'écrit encore

$$ \det \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \circ \tilde{\sigma}, \frac{\partial \omega}{\partial u} \circ \tilde{\sigma}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot V \right) = (Q_\sigma \circ \omega) \det \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial u}, V \right) $$

d'où

$$ \det \left((\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot V \right) $$
$$ = (\det \sigma)(Q_\sigma \circ \omega) \det \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial u}, V \right) . $$

Ceci montre l'égalité $\det(\Phi'_\sigma \circ \omega) = (\det \sigma)(Q_\sigma \circ \omega)$ en chaque point où le gradient de ω n'est pas nul.

THÉORÈME 2.

1. $Q_\sigma(0,0,0)$ *vaut* 0 *ou* 1 *selon que* $\det\sigma$ *est pair ou impair.*
2. $\Phi_\sigma(0,0,0) = (0,0,0)$ *si et seulement si* $\det\sigma$ *est impair.*
3. $Q'_\sigma(0,0,0) = 0$.
4. *Si* $\det\sigma$ *est impair,* $Q''_\sigma(0,0,0)$ *est diagonal négatif.*

Démonstration. Nous allons calculer $\Phi_\sigma(0,0,z)$. Pour ce faire, considérons $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, SL(2,\mathbf{C}))$ tel que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$, avec $\lambda + \lambda^{-1} = z$. On a évidemment $\varphi(a)^2 = \varphi(b)^2 = -1$ et, donc tout produit d'un certain nombre de $\varphi(a)$ et de $\varphi(b)$ est réductible à l'une des formes $\pm\varphi((ab)^n)$, $\pm\varphi((ab)^n a)$, $\pm\varphi((ba)^n)$ ou $\pm\varphi((ba)^n b)$ dont les traces respectives sont $\pm t_n(z)$, 0, $\pm t_n(z)$ et 0 (où t_n est un polynôme de Chebyschev de première espèce, cf. II).

Ceci nous conduit à définir le procédé suivant de réduction d'un élément de F: on remplace autant de fois qu'il est possible a^2 et b^2 par -1. Ainsi le mot aba^2b^3 donne $-a$.

Réduisons ainsi les mots $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$. On obtient respectivement $\varepsilon\bar\sigma(a)$ et $\eta\bar\sigma(b)$ où ε et η valent ± 1. Nous pouvons dresser le tableau suivant qui donne, pour les différentes valeurs possibles de $\bar\sigma(a)$ et $\bar\sigma(b)$, en première ligne, $\Phi_\sigma(0,0,z)$ et, en seconde, $Q_\sigma(0,0,z)$ en termes des polynômes de Chebyschev t et u en la variable z.

$\bar\sigma(b)$ / $\bar\sigma(a)$	$(ab)^n$	$(ab)^n a$	$(ba)^n$	$(ba)^n b$
$(ab)^m$	(t_m, t_n, t_{m+n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2	(t_m, t_n, t_{m-n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2
$(ab)^m a$	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, -t_{m-n})$ u_{m-n}^2	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, t_{m+n+1})$ u_{m+n+1}^2

$(ba)^m$	(t_m, t_n, t_{m-n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2	(t_m, t_n, t_{m+n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2
$(ba)^m b$	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, t_{m+n+1})$ u_{m+n+1}^2	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, -t_{m-n})$ u_{m-n}^2

On observe que $Q_\sigma(0, 0, z) = u_\nu(z)^2$ où $\nu = \det \bar{\sigma}$. Il est clair, par ailleurs, que $\det \sigma$ et $\det \bar{\sigma}$ ont même parité. La première assertion résulte alors de ce que $u_n(0) = \sin \dfrac{n\pi}{2}$.

La seconde assertion résulte de l'examen du tableau, compte tenu de ce que $t_n(0) = 2 \cos \dfrac{n\pi}{2}$.

La troisième assertion résulte simplement de la parité de u_n^2.

Démontrons la dernière assertion. D'abord, il est facile de déterminer $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$ et $\Phi_\sigma(0, y, 0)$. En effet soit $\tau = (a^{-1}, ab) \in \operatorname{End} F$. On a $\Phi_\tau(x, y, z) = (x, z, y)$ et par conséquent $\Phi_{\sigma\tau}(x, y, z) = \Phi_\sigma(x, z, y)$, ce qui permet par le procédé précédent de déterminer $\Phi_\sigma(0, y, 0)$. De la même façon pour calculer $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$ on utilise $\tau = (ab, b^{-1})$.

Supposons donc que $\det \sigma = 1 \pmod 2$. Ce qui précède montre que deux des composantes de chacune des fonctions $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$, $\Phi_\sigma(0, y, 0)$ et $\Phi_\sigma(0, 0, z)$ sont nulles alors que les troisièmes sont de la forme $\pm p_{n_1}(x)$, $\pm p_{n_2}(y)$, $\pm p_{n_3}(z)$ respectivement, les entiers n_1, n_2, n_3 étant impairs. Par ailleurs, en vertu du théorème 1, compte tenu de $Q_\sigma(0, 0, 0) = 1$, on a $\det \Phi'_\sigma(0, 0, 0) = 1 \pmod 2$. Comme $p'_{n_i}(0) = n_i \sin \dfrac{n_i \pi}{2} \neq 0$ (pour $i = 1, 2, 3$), on en déduit que la matrice $\Phi'_\sigma(0, 0, 0)$ a un terme non nul et un seul aussi bien dans chaque ligne que dans chaque colonne et que ses termes non nuls sont, aux signes près, n_1, n_2 et n_3. Autrement dit ${}^t\Phi'_\sigma(0, 0, 0)\Phi'_\sigma(0, 0, 0)$ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des carrés de nombres impairs.

Différentions maintenant deux fois à l'origine la relation $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$. On obtient

$$ {}^t\Phi'_\sigma(0, 0, 0)\lambda''(0)\Phi'_\sigma(0, 0, 0) = \lambda''(0) - 4Q''_\sigma(0, 0, 0)$$

en ayant tenu compte des relations $\lambda(0,0,0) = -4$ et $\lambda'(0,0,0) = 0$. La conclusion résulte de $\lambda''(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Prenons un exemple: $\sigma = (aba^2b^2a, aba^3bab)$. Calculons $\Phi_\sigma(0,0,z)$. La réduction de σ donne $(aba, -(ab)^3)$ donc

$$\Phi_\sigma(0,0,z) = (0, -t_3(z), 0) = (0, 3z - z^3, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0,0,z) = u_3(z)^2 = (z^2-1)^2 .$$

Pour calculer $\Phi_\sigma(x,0,0)$, multiplions σ par (ab, b^{-1}), on obtient $(babab, bab)$, qui est réduit. Donc

$$\Phi_\sigma(x,0,0) = (0,0,-t_1(x)) = (0,0,-x)$$

et

$$Q_\sigma(x,0,0) = u_1(x)^2 = 1 .$$

De façon analogue, on obtient

$$\Phi_\sigma(0,y,0) = (p_3(y), 0, 0) = (y^3 - 3y, 0, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0,y,0) = (y^2-1)^2 .$$

Ensuite on a

$$-2Q''_\sigma(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - I$$

d'où

$$Q''_\sigma(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

VI. Cas d'un groupe libre à plus de deux générateurs

Avant de passer à la généralisation partielle de ce qui précède, nous avons besoin d'un certain nombre de lemmes sur $SL(2, \mathbf{C})$.