

# §3. Perfect isometries of H-lattices

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 2.3. PROPOSITION.

(a) Let  $\mathcal{H}^n \subseteq L \subseteq \mathcal{H}^{*n}$  be a  $\mathbf{Z}$ -module. Then  $(L, \text{Tr} \circ h)$  is integral if and only if  $\eta(L)$  is a totally isotropic subspace of the symmetric bilinear space  $(\mathbf{F}_4^n, \text{Tr} \circ \eta(h))$ , where  $\eta(h)$  is the standard hermitian form on  $\mathbf{F}_4^n$ .

(b) The  $\mathbf{Z}$ -lattice  $(L, \text{Tr} \circ h)$  is unimodular if and only if  $\eta(L)$  is a maximal totally isotropic subspace of  $(\mathbf{F}_4^n, \text{Tr} \circ \eta(h))$ .

*Proof.* (a) This follows easily from 2.2.

(b) This follows from (a), since  $L$  is unimodular if and only if  $L$  is maximal integral.

§3. PERFECT ISOMETRIES OF  $\mathcal{H}$ -LATTICES

In this section we show that certain special class of  $\mathbf{Z}$ -lattices admit perfect isometries. We begin with the following definition.

3.1. *Definition.* A  $\mathbf{Z}$ -lattice  $(L, b)$  is called an  $\mathcal{H}$ -lattice if  $L$  is an  $\mathcal{H}$ -module and  $b = \text{Tr} \circ h$  for some hermitian form  $h$ .

3.2. PROPOSITION. Every  $\mathcal{H}$ -lattice has a perfect isometry.

*Proof.* Let  $(L, \text{Tr} \circ h)$  be an  $\mathcal{H}$ -lattice. Let  $\sigma: L \rightarrow L$  denote left (or right) multiplication by  $\xi$  where  $\xi$  is one of the units  $(1 \pm i \pm j \pm k)/2$ . Then,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \circ h(\sigma(x), \sigma(y)) &= \text{Tr} \circ h(\xi x, \xi y) = \text{Tr}(\xi h(x, y) \bar{\xi}) \\ &= \xi h(x, y) \bar{\xi} + \xi \overline{h(x, y)} \bar{\xi} = \xi (h(x, y) + \overline{h(x, y)}) \bar{\xi} = \xi \bar{\xi} (h(x, y) + \overline{h(x, y)}) \\ &= h(x, y) + \overline{h(x, y)} = \text{Tr} \circ h(x, y). \end{aligned}$$

Therefore  $\sigma$  is an isometry. Since the minimal polynomial of  $\sigma$  is  $x^2 - x + 1$ ,  $\det(1 - \sigma) = 1$  and hence  $\sigma$  is perfect.

As a special case of this we have:

3.3. COROLLARY. The  $\mathcal{H}$ -lattice  $(\mathcal{H}, \text{Tr} \circ h)$  has a perfect isometry.

3.4. PROPOSITION. Every perfect isometry of  $(\mathcal{H}, \text{Tr} \circ h)$  induces a perfect  $\mathbf{F}_2$ -isomorphism of  $\mathcal{H}^*/\mathcal{H} = \mathbf{F}_4$ , which corresponds to multiplication by  $\omega$ , where  $\mathbf{F}_2(\omega) = \mathbf{F}_4$ .

*Proof.* Note that every perfect isometry  $\sigma$  of  $\mathcal{H}$  extends naturally to a perfect isometry of  $\mathcal{H}^*$ , inducing a perfect  $\mathbf{F}_2$ -isomorphism  $\eta(\sigma)$  of  $\mathcal{H}^*/\mathcal{H}$ ,  $\eta$  denoting the induced map on the quotient. The proof of the proposition is complete in view of the following simple lemma.

3.5. LEMMA. *An  $\mathbf{F}_2$ -linear isomorphism of  $\mathbf{F}_4$  is perfect if and only if it corresponds to multiplication by  $\omega$ , where  $\omega$  denotes a primitive element of  $\mathbf{F}_4$  over  $\mathbf{F}_2$ .*

*Proof.* An  $\mathbf{F}_2$ -linear isomorphism of  $\mathbf{F}_4$  is perfect if and only if it has no fixed point other than the trivial element. Since,  $GL_2(\mathbf{F}_2) \simeq S_3$ , it is easy to see that every perfect isomorphism of  $\mathbf{F}_4$ , corresponds to multiplication by  $\omega$ ,  $\omega$  being as above.

3.6. PROPOSITION. *Let  $L$  be a  $\mathbf{Z}$ -lattice such that  $\mathcal{H}^n \subseteq L \subseteq \mathcal{H}^{*n}$ . If  $L$  is an  $\mathcal{H}$ -lattice, then  $L$  has a perfect isometry, which corresponds to multiplication by  $\omega$ , on the quotient  $\mathcal{H}^{*n}/\mathcal{H}^n$ .*

*Proof.* Multiplication by  $\xi$  is a perfect isometry of  $\mathcal{H}^n$  which extends naturally to a perfect isometry of  $\mathcal{H}^{*n}$ . Clearly the induced map on the quotient  $\mathcal{H}^{*n}/\mathcal{H}^n$  is multiplication by  $\omega$ . Since  $L$  is an  $\mathcal{H}$ -module, it preserves  $L$  as well.

In particular,

3.7. COROLLARY. *Every  $\mathcal{H}$ -lattice  $(L, Tr \circ h)$  of type  $nD_4$  has a perfect isometry.*

It is but natural to ask whether every  $\mathbf{Z}$ -lattice of type  $nD_4$  which has a perfect isometry necessarily admits the structure of an  $\mathcal{H}$ -lattice. We shall show that this is indeed true. For doing this we need to recall some basic facts on the automorphisms of the root system  $nD_4$ .

#### §4. AUTOMORPHISMS OF THE ROOT SYSTEM $nD_4$ AND PERFECT ISOMETRIES

For any root system  $R$ , let  $\mathcal{W}(R)$  denote the Weyl group of  $R$  (i.e. the group generated by the reflections defined by the roots). Then  $\mathcal{W}(R)$  is a normal subgroup of  $Aut R$ , which preserves every  $\mathbf{Z}$ -lattice  $L$  such that  $\mathbf{Z}R \subseteq L \subseteq \mathbf{Z}R^\#$ . We thus get a natural map  $\eta: Aut R/\mathcal{W}(R) \rightarrow Aut_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}R^\#/\mathbf{Z}R)$ . In view of ([H], p. 72; [C-S], p. 432) this is an injection.