

# §1

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

[On obtient ainsi des bigèbres sur  $\mathbf{C}$ ; à ces bigèbres correspondent des schémas en groupes; à ces schémas en groupes correspondent des groupes de Lie complexes; à ces groupes... Voyez, voyez, la machine tourner!]

## EXERCICES

## § 1

1) Soit  $E$  un  $K$ -module projectif de type fini. On identifie  $\text{End}(E)$  à  $E \otimes E'$ ; on note  $I$  l'élément de  $E \otimes E'$  correspondant à  $1_E$ , et  ${}'I$  son image dans  $E' \otimes E$ .

On munit  $E \otimes E' = \text{End}(E)$  de la structure de cogèbre *opposée* à celle définie au n° 1.1.

a) Si  $x = a \otimes a' \in E \otimes E'$ , montrer que  $d(x) = a \otimes {}'I \otimes a'$ .

b) On définit une application  $d_E: E \rightarrow \text{End}(E) \otimes E = E \otimes E' \otimes E$  par  $a \mapsto a \otimes {}'I$ . Montrer que cette application définit sur  $E$  une structure de comodule à gauche sur  $\text{End}(E)$ .

c) On identifie  $\text{End}(E) \otimes \text{End}(E)$  à  $\text{End}(E \otimes E)$  par l'application  $(u, v) \mapsto u \otimes v$ . D'autre part, si on écrit  $\text{End}(E \otimes E)$  sous la forme  $E \otimes E \otimes E' \otimes E'$  la permutation des deux facteurs  $E'$  définit un automorphisme  $\sigma$  de  $\text{End}(E \otimes E)$ . Montrer que l'on a

$$d(u) = \sigma(u \otimes 1_E) \quad \text{si} \quad u \in \text{End}(E).$$

d) Soit  $(v_i)$  une base de  $E$ , et soit  $(E_{ij} = v'_j \otimes v_i)$  la base correspondante de  $\text{End}(E)$ . Montrer que

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{ik} \otimes E_{kj}.$$

e) Justifier la Remarque 2 du n° 1.2.

2) Soit  $C$  une cogèbre plate, et soit  $E$  un comodule sur  $C$ .

a) Soit  $V$  un  $K$ -module tel que  $E$  soit isomorphe (comme module) à un quotient de  $E$ . Montrer qu'il existe un sous-comodule  $F$  de  $C \otimes V$  tel que  $E$  soit isomorphe (comme comodule) à un quotient de  $F$ . (Utiliser le morphisme  $C \otimes V \rightarrow C \otimes E$  et le fait que  $E$  est isomorphe à un sous-comodule de  $C \otimes E$ .) Montrer que, si  $K$  est noethérien, et  $E$  de type fini, on peut choisir  $F$  de type fini.

b) On suppose que  $K$  est un anneau de Dedekind. Montrer que tout comodule  $E$  de type fini est quotient d'un comodule  $F$  qui est projectif de type fini. (Utiliser a) en prenant pour  $V$  un module libre de sorte que  $F$  soit sans torsion.)

## §2

1) Soit  $x \in C$  tel que  $d_E(x) = x \otimes x$  et  $e(x) = 1$ . On note  $K_x$  le module  $K$  muni de la structure de comodule définie par

$$y \mapsto x \otimes y.$$

Prouver l'équivalence des propriétés suivantes:

- a)  $K_x$  est le seul objet simple de  $\text{Com}_C^f$  (à isomorphisme près).
- b) Toute sous-cogèbre de  $C$  non réduite à 0 contient  $x$ .
- c) Le comodule  $C$  est extension essentielle du sous-comodule  $Kx$  (i.e. tout sous-comodule de  $C$  différent de 0 contient  $x$ ).
- d) L'algèbre profinie  $A$  duale de  $C$  est un anneau local d'idéal maximal le noyau de l'homomorphisme  $a \mapsto \langle x, a \rangle$  de  $A$  dans  $K$ .

[Noter que c) signifie ceci: le comodule  $C$  est l'enveloppe injective du comodule simple  $Kx$ .]

## §3

1) Avec les notations du n° 3.4, montrer sans utiliser la prop. 4 que la formule (iii) est conséquence des formules (i) et (ii).

2) Les notations étant celles du n° 3.4, on suppose  $K$  parfait. Soit  $g$  un automorphisme du foncteur  $\nu$ . Pour tout objet  $E$  de  $\text{Com}_C^f$ , soit  $s_E$  (resp.  $u_E$ ) la composante semi-simple (resp. unipotente) de  $g(E)$ . Montrer que  $E \mapsto s_E$  et  $E \mapsto u_E$  sont des automorphismes du foncteur  $\nu$ . Si  $g$  vérifie les relations (i) et (ii), montrer qu'il en est de même pour  $s$  et  $u$ . Dédurre de là la décomposition des éléments de  $G(K)$  en produits d'éléments semi-simples et unipotents commutant entre eux (dans le cas où  $G$  est un schéma en groupes).