§1

[On obtient ainsi des bigèbres sur $\mathbf{C}$; à ces bigèbres correspondent des schémas en groupes; à ces schémas en groupes correspondent des groupes de Lie complexes; à ces groupes... Voyez, voyez, la machine tourner!]

EXERCICES

§ 1

1) Soit E un K-module projectif de type fini. On identifie $\mathrm{End}(E)$ à $E \otimes E'$; on note I l'élément de $E \otimes E'$ correspondant à 1_E, et ${}^tI$ son image dans $E' \otimes E$.

On munit $E \otimes E' = \mathrm{End}(E)$ de la structure de cogèbre *opposée* à celle définie au n° 1.1.

a) Si $x = a \otimes a' \in E \otimes E'$, montrer que $d(x) = a \otimes {}^tI \otimes a'$.

b) On définit une application $d_E : E \to \mathrm{End}(E) \otimes E = E \otimes E' \otimes E$ par $a \mapsto a \otimes {}^tI$. Montrer que cette application définit sur E une structure de comodule à gauche sur $\mathrm{End}(E)$.

c) On identifie $\mathrm{End}(E) \otimes \mathrm{End}(E)$ à $\mathrm{End}(E \otimes E)$ par l'application $(u, v) \mapsto u \otimes v$. D'autre part, si on écrit $\mathrm{End}(E \otimes E)$ sous la forme $E \otimes E \otimes E' \otimes E'$ la permutation des deux facteurs E' définit un automorphisme σ de $\mathrm{End}(E \otimes E)$. Montrer que l'on a

$$d(u) = \sigma(u \otimes 1_E) \quad \text{si} \quad u \in \mathrm{End}(E) .$$

d) Soit (v_i) une base de E, et soit $(E_{ij} = v_j' \otimes v_i)$ la base correspondante de $\mathrm{End}(E)$. Montrer que

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{ik} \otimes E_{kj} .$$

e) Justifier la Remarque 2 du n° 1.2.

2) Soit C une cogèbre plate, et soit E un comodule sur C.

a) Soit V un K-module tel que E soit isomorphe (comme module) à un quotient de E. Montrer qu'il existe un sous-comodule F de $C \otimes V$ tel que E soit isomorphe (comme comodule) à un quotient de F. (Utiliser le morphisme $C \otimes V \to C \otimes E$ et le fait que E est isomorphe à un sous-comodule de $C \otimes E$.) Montrer que, si K est noethérien, et E de type fini, on peut choisir F de type fini.

b) On suppose que K est un anneau de Dedekind. Montrer que tout comodule E de type fini est quotient d'un comodule F qui est projectif de type fini. (Utiliser a) en prenant pour V un module libre de sorte que F soit sans torsion.)

§2

1) Soit $x \in C$ tel que $d_E(x) = x \otimes x$ et $e(x) = 1$. On note K_x le module K muni de la structure de comodule définie par

$$y \mapsto x \otimes y .$$

Prouver l'équivalence des propriétés suivantes:

a) K_x est le seul objet simple de Com_C^f (à isomorphisme près).

b) Toute sous-cogèbre de C non réduite à 0 contient x.

c) Le comodule C est extension essentielle du sous-comodule Kx (i.e. tout sous-comodule de C différent de 0 contient x).

d) L'algèbre profinie A duale de C est un anneau local d'idéal maximal le noyau de l'homomorphisme $a \mapsto \langle x, a \rangle$ de A dans K.

[Noter que c) signifie ceci: le comodule C est *l'enveloppe injective* du comodule simple Kx.]

§3

1) Avec les notations du n° 3.4, montrer sans utiliser la prop. 4 que la formule (iii) est conséquence des formules (i) et (ii).

2) Les notations étant celles du n° 3.4, on suppose K parfait. Soit g un automorphisme du foncteur v. Pour tout objet E de Com_C^f, soit s_E (resp. u_E) la composante semi-simple (resp. unipotente) de $g(E)$. Montrer que $E \mapsto s_E$ et $E \mapsto u_E$ sont des automorphismes du foncteur v. Si g vérifie les relations (i) et (ii), montrer qu'il en est de même pour s et u. Déduire de là la décomposition des éléments de $G(K)$ en produits d'éléments semi-simples et unipotents commutant entre eux (dans le cas où G est un schéma en groupes).