

# 4. Expression des invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 3 en termes de points de croisement

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Supposons encore  $x < y$  mais ne supposons plus  $e(x, y) = 0$ , il résulte de ce qui précède que l'on a dans tous les cas les relations suivantes:

$$(3.2.1) \quad \begin{aligned} & \sum_{z \in X, z < x} (1 - e(x, y)) e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) \\ & = \sum_{z \in X, z > y} (1 - e(x, y)) e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) ; \end{aligned}$$

$$(3.2.2) \quad \sum_{z \in X, x < z < y} (1 - e(x, y)) e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) = 0 .$$

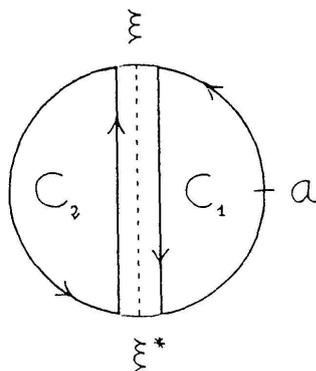


FIGURE 7

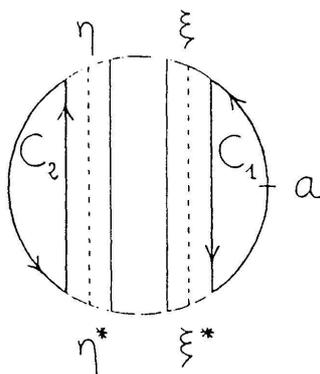


FIGURE 8

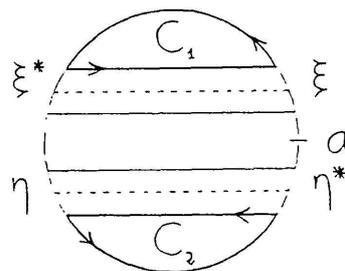


FIGURE 9

4. EXPRESSION DES INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3 EN TERMES DE POINTS DE CROISEMENT

Soient  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant des nœuds et  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . On note encore abusivement  $f: S = S(\alpha) \rightarrow A$  l'application induite par l'invariant  $f$ . On continue à utiliser les notations du paragraphe 2.

4.1. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 1

PROPOSITION 4.1. *Tout invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1 est nul. (Rappelons que nous supposons qu'un invariant est nul sur le nœud trivial.)*

Démonstration. Soient  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1 et  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . On fixe une origine  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$ . L'application  $f: S = S(\alpha) \rightarrow A$ , qui est de degré inférieur ou égal à 1, est de la forme:

$$f(s) = c_{\emptyset} + \sum_{x \in X} \delta_{s_a, x}(s) c_x$$

(notations du paragraphe 2). Le coefficient  $c_{\emptyset} = f(s_a)$  est nul; on montre qu'il en est de même pour les coefficients  $c_x$  de la façon suivante. Soient  $s_1$

et  $s_2$  les sections descendantes correspondant aux composantes connexes de  $S^1 - \tilde{X}$  adjacentes à un point  $\xi$  de  $\tilde{X}$ , on a :

- $s_2 - s_1 = \alpha(\xi)$ ;
- $f(s_2) - f(s_1) = \pm c_{\alpha(\xi)}$ ;
- $f(s_1) = 0$  et  $f(s_2) = 0$ .

#### COMMENTAIRES

On peut voir directement 4.1 comme un corollaire de 1.4 et la démonstration ci-dessus peut sembler bien compliquée. En fait le sous-paragraphe 4.1 n'est là que pour assurer la cohérence idéologique du paragraphe 4.

#### 4.2. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 2

Soient  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 2 et  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . On considère à nouveau l'application  $f: S = S(\alpha) \rightarrow A$ , de degré inférieur ou égal à 2, induite par l'invariant  $f$ .

On fixe une origine  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$ . Soit  $P = \{x, y\}$  une partie à 2 éléments de  $X$  avec  $x < y$  (pour la relation d'ordre sur  $X$  définie par  $a$ ), on pose :

$$(4.2.1) \quad \lambda_{a,P}(s) = -\delta_{s_a,x}(s) (1 - \delta_{s_a,y}(s)) \varepsilon_x(s_a) \varepsilon_y(s_a).$$

Compte tenu de (2.1),  $\lambda_{a,P}(s)$  peut être également défini par :

$$(4.2.2) \quad 4\lambda_{a,P}(s) = (\varepsilon_x(s) - \varepsilon_x(s_a)) (\varepsilon_y(s) + \varepsilon_y(s_a)).$$

On note enfin  $\mathcal{P}_2(X)$  l'ensemble des parties à 2 éléments de  $X$ . La proposition ci-dessous généralise pour tout groupe abélien  $A$  la première formule du théorème 4 de [La] qui correspond au cas  $A = \mathbf{Z}/2$  :

PROPOSITION 4.2.3. *L'application  $f: S \rightarrow A$  est donnée par la formule*

$$f(s) = \left( \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a,P}(s) \right) f(T).$$

*Démonstration.* La proposition 1.5 (a) et la proposition 2.5 donnent :

PROPOSITION 4.2.4. *Pour tout  $P$  dans  $\mathcal{P}_2(X)$  et tout  $s$  dans  $S$  on a*

$$(\Delta_P f)(s) = e(P) \varepsilon_P(s) f(T).$$

A partir de là, la démonstration de la proposition 4.2.3 est essentiellement la même que celle de [La]. D'après 2.3 on a

$$f(s) = f(s_a) + \sum_{z \in X} \delta_{s_a, z}(s) (\Delta_z f)(s_a) \\ + \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} \delta_{s_a, P}(s) (\Delta_P f)(s_a),$$

ou encore, puisque  $f(s_a)$  est nul et  $(\Delta_P f)(s_a)$  égal à  $e(P) \varepsilon_P(s_a) f(T)$ ,

$$(4.2.5) \quad f(s) = \sum_{z \in X} \delta_{s_a, z}(s) f(s_a + z) \\ + \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} \delta_{s_a, P}(s) e(P) \varepsilon_P(s_a) f(T).$$

Tout se ramène donc au calcul de  $f(s_a + z)$ .

Soient  $z_-$  et  $z_+$  les composantes connexes de  $S^1 - \tilde{X}$  respectivement adjacentes à gauche et à droite à  $\inf \alpha^{-1}(z)$ . On vérifie:

$$(4.2.6) \quad (s_{z_-} - s_a)(r) e(r, z) = \begin{cases} e(r, z) & \text{si } r < z \\ 0 & \text{si } r > z; \end{cases}$$

$$s_{z_+} - s_{z_-} = z.$$

Avec (4.2.5) ces deux formules impliquent la suivante:

$$f(s_{z_+}) - f(s_{z_-}) = f(s_a + z) + \sum_{r \in X, r < z} e(r, z) \varepsilon_r(s_a) \varepsilon_z(s_a) f(T).$$

Compte tenu de  $f(s_{z_-}) = 0$  et  $f(s_{z_+}) = 0$ , il vient

$$f(s_a + z) = - \sum_{r \in X, r < z} e(r, z) \varepsilon_r(s_a) \varepsilon_z(s_a) f(T).$$

D'où le résultat.

Voici maintenant la version «entière» du paragraphe 5 de [La].

On oublie qu'il existe des invariants de Vassiliev de degré 2 à valeurs dans  $\mathbf{Z}$  et on considère *a priori* l'expression  $\sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a, P}(s)$ .

PROPOSITION 4.2.6. *La somme  $\sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a, P}(s)$  est indépendante du choix de  $a$ .*

*Démonstration.* Soient  $\iota$  le plus petit élément de  $\tilde{X}$  pour la relation d'ordre induite par celle de  $S^1 - \{a\}$  et  $b$  un point dans la composante connexe de  $S^1 - \tilde{X}$  adjacente à droite à  $\iota$ ; il faut montrer:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a, P}(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{b, P}(s).$$

On pose  $i = \alpha(\iota)$ ; on a donc  $\iota = s_a(i)$  et  $i = \inf X$  (pour la relation d'ordre sur  $X$  définie par  $a$ ). Soit  $P$  une partie à 2 éléments de  $X$ . Si  $i \notin P$  alors  $\lambda_{b, P}(s) = \lambda_{a, P}(s)$ . Si  $i \in P$  et si  $e(P) = 1$  alors  $\lambda_{b, P}(s) - \lambda_{a, P}(s) = \delta_{s_a, i}(s) \varepsilon_P(s_a)$ . On a par conséquent

$$\begin{aligned} & \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{b, P}(s) - \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a, P}(s) \\ &= \delta_{s_a, i}(s) \varepsilon_i(s_a) \sum_{x \in X - \{i\}} e(i, x) \varepsilon_x(s_a). \end{aligned}$$

Or cette dernière somme est nulle d'après (3.1).

On pose:

$$(4.2.7) \quad V_2(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a, P}(s).$$

THÉORÈME 4.2.8. *L'entier  $V_2(s)$  est un invariant de la classe d'isotopie du nœud  $\varphi_s$ .*

*Démonstration.* On vient d'assigner à tout diagramme de nœud  $(\alpha; s)$  un entier  $V_2(\alpha; s) = V_2(s)$ . Il s'agit de vérifier que  $V_2(\alpha; s)$  est invariant par les trois mouvements de Reidemeister.

L'invariance par le mouvement I (figure 10) est immédiate: un point double qui n'est enlacé avec aucun autre n'intervient pas au second membre de (4.2.7).

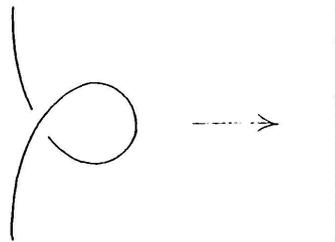


FIGURE 10

La vérification de l'invariance par les mouvements II et III (figures 11 et 12) est aisée parce que dans la formule (4.2.7) on a le choix de l'origine  $a$ .

On considère les figures 11 et 12; dans les deux cas la projection du mouvement de Reidemeister donne une isotopie régulière entre  $\alpha$  et une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$  que l'on note  $\beta$ .

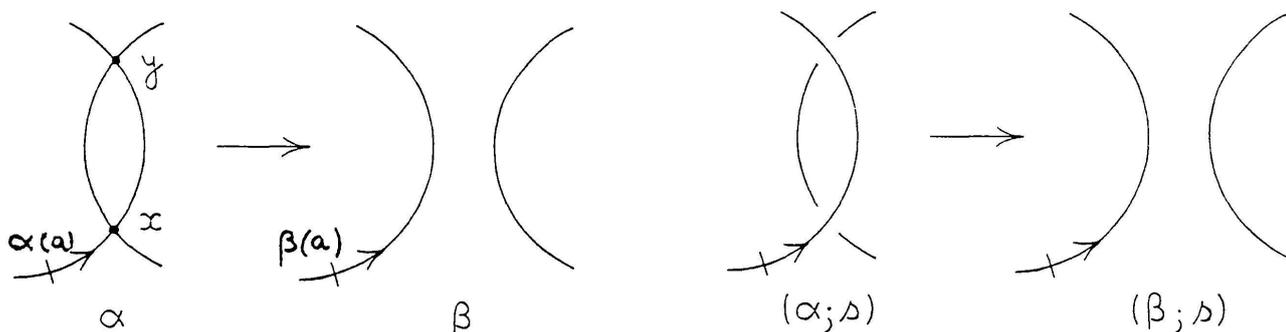


FIGURE 11

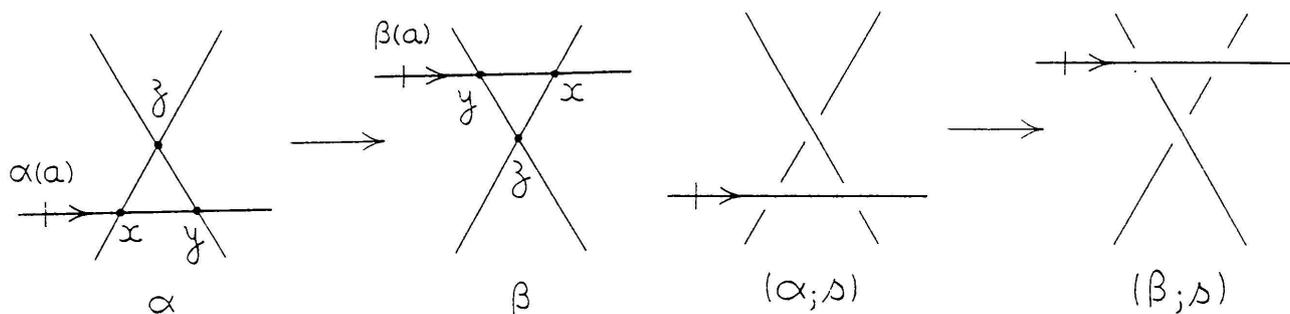


FIGURE 12

Dans le cas II les ensembles  $X(\beta)$  et  $\tilde{X}(\beta)$  s'identifient respectivement à  $X(\alpha) - \{x, y\}$  et  $\tilde{X}(\alpha) - \alpha^{-1}(\{x, y\})$ ;  $S(\beta)$  s'identifie donc à un sous-ensemble de  $S(\alpha)$ .

Dans le cas III on peut identifier  $\tilde{X}(\beta)$  à  $\tilde{X}(\alpha)$  et  $X(\beta)$  à  $X(\alpha)$  «en suivant les points doubles par continuité»;  $S(\beta)$  s'identifie donc à  $S(\alpha)$ .

Dans les deux cas l'égalité  $V_2(\alpha; s) = V_2(\beta; s)$  résulte de ce que  $\lambda_{a, P}(s)$  est nul si  $x$  ou  $y$  appartient à  $P$ , pour le choix indiqué de  $a$ .

On note encore  $V_2: \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  l'invariant des nœuds qui vient d'être défini. Il est clair qu'il s'agit d'un invariant de Vassiliev de degré 2. La proposition 4.2.3, ou plus directement les propositions 4.1 et 4.2.4 et le fait que  $V_2(T)$  vaut 1, impliquent:

PROPOSITION 4.2.9. Soit  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant de Vassiliev d'ordre inférieur ou égal à 2. Alors:

$$f(K) = V_2(K) f(T) .$$

COMMENTAIRES

Soit  $C_K(t)$  le polynôme de Conway d'un nœud  $K$  [Co];  $C_K(t)$  est un polynôme pair à coefficients entiers:

$$C_K(t) = 1 + c_2(K) t^2 + c_4(K) t^4 + \dots .$$

Bar-Natan a montré (voir par exemple [Ba]) que le coefficient  $c_{2n}$  est un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à  $2n$ . La proposition 4.2.9 montre que les invariants  $c_2$  et  $V_2$  coïncident ( $C_T(t) = 1 + t^2$ ).

La théorie que nous avons faite de l'invariant  $V_2$  est à comparer à celle du chapitre III de [Ka].

VARIANTES DE L'EXPRESSION DE  $V_2$ 

Si dans la démonstration de 4.2.3 on remplace  $\inf \alpha^{-1}(z)$  par  $\sup \alpha^{-1}(z)$  on obtient:

$$f(s) = \left( \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a,P}^*(s) \right) f(T)$$

avec  $\lambda_{a,P}^*(s) = - (1 - \delta_{s_a, x}(s)) \delta_{a, y}(s) \varepsilon_x(s_a) \varepsilon_y(s_a)$ , c'est-à-dire  $\lambda_{a,P}^*(s) = \lambda_{a,P}(s^*)$ . On a donc aussi

$$(4.2.10) \quad V_2(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a,P}^*(s).$$

L'égalité

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a,P}(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a,P}^*(s)$$

est en fait équivalente à (3.1). On a en effet

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) (\lambda_{a,P}(s) - \lambda_{a,P}^*(s)) = \sum_{x \in X} \delta_{s_a, x}(s) c_x$$

avec

$$c_x = \varepsilon_x(s_a) \left( \sum_{y \in X, y < x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a) - \sum_{y \in X, y > x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a) \right).$$

Le fait que  $V_2$  puisse s'exprimer à la fois par les formules (4.2.7) et (4.2.10) a une explication plus conceptuelle. Cela traduit deux propriétés de cet invariant:

- $V_2(K^*) = V_2(K)$  (nous dirons que l'invariant  $V_2$  est pair);
- $V_2(\bar{K}) = V_2(K)$ ,  $\bar{K}$  désignant le nœud obtenu à partir de  $K$  par composition à la source avec un difféomorphisme de  $S^1$  renversant l'orientation.

Ces égalités sont conséquence de la théorie du paragraphe 1: les invariants  $K \mapsto V_2(K) - V_2(K^*)$  et  $K \mapsto V_2(K) - V_2(\bar{K})$  sont triviaux parce que ce sont des invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1.

Compte tenu de (2.1) ou (4.2.2), on a

$$2(\lambda_{a,P}(s) + \lambda_{a,P}^*(s)) = \varepsilon_P(s) - \varepsilon_P(s_a),$$

si bien que l'invariant  $V_2$  est encore donné par

$$(4.2.11) \quad 4 V_2(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) (\varepsilon_P(s) - \varepsilon_P(s_a)),$$

ce qui en posant  $E(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \varepsilon_P(s)$  s'écrit

$$(4.2.12) \quad 4 V_2(s) = E(s) - E(s_a).$$

Expliquons pourquoi une telle expression était prévisible. Considérons l'application  $f: S \rightarrow \mathbf{Z}$  induite par un invariant de Vassiliev de degré 2, à

valeurs dans  $\mathbf{Z}$ , dont la fonction de poids est  $W_2$  (voir proposition 1.5 (a)). D'après ce que nous avons dit au paragraphe 2 il existe des entiers  $c_x, x$  parcourant  $X$ , et  $c_\emptyset$  tels que l'on a

$$4f(s) = E(s) + \sum_{x \in X} c_x \varepsilon_x(s) + c_\emptyset .$$

Comme nous avons vu ci-dessus que  $f$  doit être paire ( $f(s) = f(s^*)$ ) les  $c_x$  sont nuls; comme  $f(s_a)$  doit être nul  $c_\emptyset$  vaut  $-E(s_a)$ .

Voici pour terminer une application amusante de (4.2.11):

PROPOSITION 4.2.13. *Soit  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . Soit  $\omega$  le point de  $S(\alpha)$  défini par  $\varepsilon_x(\omega) = 1$  pour tout  $x$  dans  $X(\alpha)$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $\alpha$  possède deux points doubles enlacés;
- (ii)  $V_2(\varphi_\omega) > 0$ ;
- (iii) il existe un nœud au-dessus de  $\alpha$  qui est non trivial.

*Démonstration de l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii).* Pour tout  $P$  dans  $\mathcal{P}_2(X)$  et tout  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$  le terme  $\varepsilon_P(\omega) - \varepsilon_P(s_a)$  qui apparaît dans l'expression (4.2.11) de  $V_2(\varphi_\omega)$  vaut 0 ou 2. Il faut donc montrer que (i) implique en fait qu'il existe  $P$  et  $a$  avec  $e(P) = 1$  et  $\varepsilon_P(s_a) = -1$ . Soient  $x$  et  $y$  deux points doubles enlacés de  $\alpha$ . Choisissons  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$  de façon à ce que  $x$  soit le plus petit des points doubles pour l'ordre induit sur  $X$ ; la relation (3.1) devient  $\sum_{z \in X - \{x\}} e(x, z) \varepsilon_z(s_a) = 0$ . Il existe donc  $y'$  dans  $X - \{x\}$  avec  $e(x, y') = 1$  et  $\varepsilon_y(s_a) + \varepsilon_{y'}(s_a) = 0$ . Ou  $\varepsilon_x(s_a) \varepsilon_y(s_a)$  ou  $\varepsilon_x(s_a) \varepsilon_{y'}(s_a)$  est égal à  $-1$ .

*Démonstration de l'implication (iii)  $\Rightarrow$  (i).* Si  $e(P) = 0$  pour tout  $P$  dans  $\mathcal{P}_2(X)$  alors tout diagramme de nœud au-dessus de  $\alpha$  peut être ramené au diagramme trivial par une succession de mouvements de Reidemeister de type I.

### 4.3. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3

#### HEURISTIQUE

Soit  $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  un invariant de Vassiliev de degré 3 dont la fonction de poids est  $W_3$  (voir proposition 1.5 (b)). Comme l'invariant  $K \mapsto f(K) + f(K^*)$  est de degré inférieur ou égal à 2, on a d'après 4.2.9

$$f(K) + f(K^*) = (f(T) + f(T^*)) V_2(K) ,$$

ou encore

$$f(K) + f(K^*) = -2f(H) V_2(K)$$

(l'égalité  $f(K_4) = f(T) + f(T^*) + 2f(H)$  du paragraphe 1 montre que l'on a  $f(T) + f(T^*) = -2f(H)$  pour  $f$  de degré inférieur ou égal à 3); il en résulte que l'invariant  $f + f(H) V_2$  est impair (change de signe quand on remplace  $K$  par  $K^*$ ). On peut donc supposer sans perdre de généralité que  $f$  est impair ce que nous ferons ci-dessous.

Soit  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . On considère toujours l'application  $f: S = S(\alpha) \rightarrow \mathbf{Z}$  induite par l'invariant  $f$ ; elle est de degré inférieur ou égal à 3 et impaire ( $f(s^*) = -f(s)$ ).

Soit  $P = \{x, y, z\}$  une partie à 3 éléments de  $X$ . On pose  $w(P) = \text{sup}(N - 1, 0)$ ,  $N$  désignant le nombre de paires, contenues dans  $P$ , de points enlacés. En d'autres termes on pose:

$$w(P) = e(x, y) e(x, z) + e(y, x) e(y, z) + e(z, x) e(z, y) \\ - e(x, y) e(x, z) e(y, z);$$

$w(\{x, y, z\})$  sera également noté  $w(x, y, z)$ . Dans le langage de [Ba],  $\alpha^{-1}(P)$  est un diagramme à 3 cordes; on a avec le symbolisme de cet article:

$$w\left(\begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{array}\right) = 1 \quad , \quad w\left(\begin{array}{c} \circ \\ \triangle \\ \circ \end{array}\right) = 2$$

et  $w$  est nul sur les trois autres éléments de  $\mathcal{D}_3$ .

On pose enfin

$$W(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) \varepsilon_P(s) ,$$

$\mathcal{P}_3(X)$  désignant le nombre de parties à 3 éléments de  $X$ .

Comme précédemment  $8f$  s'écrit

$$8f(s) = W(s) + \sum_{Q \in \mathcal{P}_2(X)} c_Q \varepsilon_Q(s) + \sum_{x \in X} c_x \varepsilon_x(s) + c_\emptyset ,$$

et puisque  $f$  est impaire les coefficients  $c_Q$  et  $c_\emptyset$  sont nuls:

$$8f(s) = W(s) + \sum_{x \in X} c_x \varepsilon_x(s) .$$

On détermine les coefficients  $c_x$  de la façon suivante. On fixe une origine  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$ . On considère comme au paragraphe précédent les composantes connexes  $x_-$  et  $x_+$  de  $S^1 - \tilde{X}$  respectivement adjacentes à gauche et à droite à  $\text{inf } \alpha^{-1}(x)$ . Compte tenu de  $f(s_{x_-}) = 0$  et  $f(s_{x_+}) = 0$ , il vient

$$(4.3.1) \quad c_x = (W(s_{x_+}) - W(s_{x_-})) / 2\varepsilon_x(s_{x_-}) ;$$

il est clair que ce quotient est entier.

*Remarque.* Posons  $s_- = s_{x_-}$ ,  $s_+ = s_{x_+}$  et introduisons également les sections descendantes  $s'_+$  et  $s'_-$  correspondant aux composantes connexes de  $S^1 - \tilde{X}$  respectivement adjacentes à gauche et à droite à  $\text{sup} \alpha^{-1}(x)$ . On obtient pareillement

$$c_x = (W(s'_+) - W(s'_-))/2\varepsilon_x(s'_-) = - (W(s'_+) - W(s'_-))/2\varepsilon_x(s_-) .$$

On doit donc avoir

$$W(s_+) - W(s_-) + W(s'_+) - W(s'_-) = 0 .$$

En fait cette relation est conséquence de (3.2.1) et (3.2.2).

L'explicitation de (4.3.1) donne

$$(4.3.2) \quad 8f(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) \mu_{a,P}(s)$$

en posant

$$\begin{aligned} \mu_{a,\{x,y,z\}}(s) &= \varepsilon_x(s) \varepsilon_y(s) \varepsilon_z(s) - \varepsilon_x(s) \varepsilon_y(s_{x_-}) \varepsilon_z(s_{x_-}) \\ &\quad - \varepsilon_x(s_{y_-}) \varepsilon_y(s) \varepsilon_z(s_{y_-}) - \varepsilon_x(s_{z_-}) \varepsilon_y(s_{z_-}) \varepsilon_z(s) . \end{aligned}$$

A l'aide de (4.2.6) et des relations d'intersection du paragraphe 3 l'expression (4.3.2) se transforme en

$$(4.3.3) \quad 8f(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) v_{a,P}(s) ,$$

le terme  $v_{a,P}(s)$  étant défini de la façon suivante. On écrit  $P = \{x, y, z\}$  avec  $x < y < z$  (toujours pour la relation d'ordre sur  $X$  définie par  $a$ ) et on pose

$$(4.3.4) \quad \begin{aligned} v_{a,P}(s) &= \varepsilon_x(s) \varepsilon_y(s) \varepsilon_z(s) - \varepsilon_x(s) \varepsilon_y(s_a) \varepsilon_z(s_a) \\ &\quad + \varepsilon_x(s_a) \varepsilon_y(s) \varepsilon_z(s_a) - \varepsilon_x(s_a) \varepsilon_y(s_a) \varepsilon_z(s) . \end{aligned}$$

On a encore:

$$(4.3.5) \quad \begin{aligned} v_{a,P}(s) &= 4(\varepsilon_x(s) \lambda_{a,\{y,z\}}(s) - \varepsilon_y(s) \lambda_{a,\{x,z\}}(s) \\ &\quad + \varepsilon_z(s) \lambda_{a,\{x,y\}}(s)) . \end{aligned}$$

### THÉORIE «AB INITIO» DE L'INVARIANT $V_3$

On oublie maintenant l'heuristique précédente (voilà pourquoi nous n'avons pas détaillé le passage de (4.3.2) à (4.3.3)) et on considère *a priori* le second membre de (4.3.3).

PROPOSITION 4.3.6. *La somme  $\sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) v_{a,P}(s)$  est indépendante du choix de  $a$ .*

*Démonstration.* On reprend les notations de la démonstration de la proposition 4.2.6. Il faut montrer:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) v_{a,P}(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) v_{b,P}(s).$$

Soit  $P$  une partie à 3 éléments de  $X$ . Si  $i$  n'appartient pas à  $P$  alors  $v_{a,P}(s)$  et  $v_{b,P}(s)$  coïncident. On suppose maintenant que  $i$  appartient à  $P$ . On suppose tout d'abord que  $w(P)$  est non nul. On écrit  $P = \{i, x, j\}$  avec  $i < x < j$  pour l'ordre sur  $X$  défini par  $a$ . Pour l'ordre défini par  $b$ , on a:  $x < j < i$  ou  $x < i < j$ , suivant que  $i$  et  $j$  sont enlacés ou non. Dans le premier cas  $v_{a,P}(s)$  et  $v_{b,P}(s)$  coïncident à nouveau; dans le second on a

$$v_{b,P}(s) - v_{a,P}(s) = 2(\varepsilon_i(s) \varepsilon_j(s_a) + \varepsilon_i(s_a) \varepsilon_j(s)) \varepsilon_x(s_a).$$

Il en résulte dans les deux cas:

$$\begin{aligned} & w(P) (v_{b,P}(s) - v_{a,P}(s)) \\ &= 2(\varepsilon_i(s) \varepsilon_j(s_a) + \varepsilon_i(s_a) \varepsilon_j(s)) (1 - e(i, j)) e(i, x) e(j, x) \varepsilon_x(s_a). \end{aligned}$$

On observe ensuite que cette relation est encore vérifiée si  $w(P)$  est nul. On conclut alors à l'aide de la relation d'intersection (3.2.2).

On pose (provisoirement, la notation définitive sera canonisée après 4.3.8):

$$g(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) v_{a,P}(s).$$

**THÉORÈME 4.3.7.** *L'entier  $g(s)$  est un invariant de la classe d'isotopie du nœud  $\varphi_s$ .*

*Démonstration.* On reprend les notations de la démonstration du théorème 4.2.8. La raison de l'invariance par le mouvement I est identique. Pour vérifier l'invariance par les mouvements II et III on choisit l'origine  $a$  de la même façon et on utilise l'expression (4.3.5) du terme  $v_{a,P}(s)$ .

*Invariance par le mouvement II (figure 11).*

On a

$$\begin{aligned} & g(\alpha; s) - g(\beta; s) \\ &= 4 \sum_{Q \in \mathcal{P}_2(X - \{x, y\})} (w(\{x\} \cup Q) \varepsilon_x(s_a) + w(\{y\} \cup Q) \varepsilon_y(s_a)) \lambda_{a,Q}(s). \end{aligned}$$

et l'on conclut en observant que l'on a:

- $w(\{x\} \cup Q) = w(\{y\} \cup Q)$  ;
- $\varepsilon_x(s_a) + \varepsilon_y(s_a) = 0$ .

*Invariance par le mouvement III (figure 12).*

En accord avec les identifications dont nous avons convenues, nous posons  $X = X(\alpha) = X(\beta)$ . Les applications de  $X(\alpha) \times S(\alpha)$  et  $X(\beta) \times S(\beta)$  dans  $\{\pm 1\}$ ,  $(x, s) \mapsto \varepsilon_x(s)$ , sont identifiées. Par contre les applications

$$e: \mathcal{P}_2(X(\alpha)) \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{et} \quad e: \mathcal{P}_2(X(\beta)) \rightarrow \{0, 1\},$$

$$w: \mathcal{P}_3(X(\alpha)) \rightarrow \{0, 1, 2\} \quad \text{et} \quad w: \mathcal{P}_3(X(\beta)) \rightarrow \{0, 1, 2\}$$

différent; nous les notons ci-dessous  $e_\alpha$  et  $e_\beta$ ,  $w_\alpha$  et  $w_\beta$ .

On a par inspection:

$$g(\beta; s) - g(\alpha; s) = \sum_{r \in X - \{x, y, z\}} ((w_\beta(x, z, r) - w_\alpha(x, z, r)) \varepsilon_x(s_a) + (w_\beta(y, z, r) - w_\alpha(y, z, r)) \varepsilon_y(s_a)) \lambda_{a, \{z, r\}}(s).$$

Il suffit donc de montrer que l'on a

$$(w_\beta(x, z, r) - w_\alpha(x, z, r)) \varepsilon_x(s_a) + (w_\beta(y, z, r) - w_\alpha(y, z, r)) \varepsilon_y(s_a) = 0$$

pour tout  $r$  dans  $X - \{x, y, z\}$ .

Pour cela on écrit

$$w(-, z, r) = e(-, r) e(z, r) + e(z, r) e(z, -) + (1 - e(z, r)) e(z, -) e(r, -)$$

et l'on fait les observations suivantes:

- Les enlacements  $e_\alpha(-, r)$  et  $e_\beta(-, r)$  coïncident.
- En considérant la relation d'intersection (3.1) à la fois pour  $\alpha$  et  $\beta$ , on obtient

$$e_\alpha(z, x) \varepsilon_x(s_a) + e_\alpha(z, y) \varepsilon_y(s_a) = e_\beta(z, x) \varepsilon_x(s_a) + e_\beta(z, y) \varepsilon_y(s_a).$$

- De même en considérant la relation d'intersection (3.2.1) à la fois pour  $\alpha$  et  $\beta$ , on obtient

$$(1 - e_\alpha(z, r)) e_\alpha(z, x) e_\alpha(r, x) \varepsilon_x(s_a) + (1 - e_\alpha(z, r)) e_\alpha(z, y) e_\alpha(r, y) \varepsilon_y(s_a) = (1 - e_\beta(z, r)) e_\beta(z, x) e_\beta(r, x) \varepsilon_x(s_a) + (1 - e_\beta(z, r)) e_\beta(z, y) e_\beta(r, y) \varepsilon_y(s_a).$$

*Remarque* (suscitée par une discussion avec G. Masbaum). Considérons pour  $k = 1$  et  $2$  les sommes:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_3(X), w(P) = k} \mu_{a, P}(s).$$

La démonstration de 4.3.6 montre en fait que ces sommes sont indépendantes de  $a$  si bien que l'on peut poser:

$$g^{(k)}(\alpha; s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X), w(P) = k} \mu_{a, P}(s)$$

et écrire  $g(\alpha; s) = g^{(1)}(\alpha; s) + 2g^{(2)}(\alpha; s)$ .

La démonstration ci-dessus montre que  $g_{(1)}(\alpha; s)$  et  $g_{(2)}(\alpha; s)$  sont invariantes par les mouvements de Reidemeister I et II; par contre elles ne sont pas en général invariantes par III.

D'après (4.3.5) l'entier  $g(s)$  est divisible par 4. En fait:

LEMME 4.3.8. *L'entier  $g(s)$  est divisible par 8.*

*Démonstration.* Puisque  $g$  est nulle sur les sections descendantes il suffit de montrer que la valeur de  $g$  modulo 8 est constante.

Soient  $s$  un élément de  $S$  et  $x$  un élément de  $X$ ; on choisit  $a$  de telle sorte que  $x$  soit le plus petit élément de  $X$  pour l'ordre défini par  $a$ . On a:

$$\varepsilon_x(s) (g(s) - g(s+x)) = 2 \sum_{Q \in \mathcal{P}_2(X - \{x\})} w(\{x\} \cup Q) (\varepsilon_Q(s) - \varepsilon_Q(s_a)) .$$

Il faut donc vérifier que la somme au second membre, disons  $G_x(s)$ , est divisible par 4. On pose  $Q = \{y, z\}$  avec  $y < z$ ; grâce à la congruence:

$$\varepsilon_y(s) \varepsilon_z(s) - \varepsilon_y(s_a) \varepsilon_z(s_a) \equiv \varepsilon_y(s) \varepsilon_z(s_a) - \varepsilon_y(s_a) \varepsilon_z(s) \pmod{4} ,$$

il vient:  $G_x(s) \equiv H_x(s) \pmod{4}$ , en posant:

$$H_x(s) = \sum_{(y, z) \in (X - \{x\})^2, y < z} w(x, y, z) (\varepsilon_y(s) \varepsilon_z(s_a) - \varepsilon_y(s_a) \varepsilon_z(s)) .$$

Cette somme s'écrit  $\sum_{y \in X - \{x\}} \varepsilon_y(s) c_{x, y}$  en posant:

$$c_{x, y} = \sum_{z \in X - \{x, y\}, z > y} w(x, y, z) \varepsilon_z(s_a) - \sum_{z \in X - \{x, y\}, z < y} w(x, y, z) \varepsilon_z(s_a) .$$

Comme  $H_x(s_a)$  est nul,  $H_x(s)$  s'écrit aussi  $\sum_{y \in X - \{x\}} (\varepsilon_y(s) - \varepsilon_y(s_a)) c_{x, y}$  et il suffit finalement de montrer que  $c_{x, y}$  est pair, c'est-à-dire:

$$\sum_{z \in X - \{x, y\}} w(x, y, z) \equiv 0 \pmod{2} .$$

Cette congruence résulte encore des relations d'intersections du paragraphe 3 (écrire  $w(x, y, z) = (1 - e(x, y)) e(x, z) e(y, z) + e(x, y) e(y, z) + e(x, y) e(x, z)$ ).

On note enfin  $V_3$  l'application de  $S$  dans  $\mathbf{Z}$  définie par la formule:

$$(4.3.9) \quad 8V_3(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) v_{a, P}(s) .$$

Comme au paragraphe 4, on note encore  $V_3: \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  l'invariant des nœuds associé. Il est clair qu'il s'agit d'un invariant de Vassiliev de degré 3.

PROPOSITION 4.3.10. *Soit  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant de Vassiliev d'ordre inférieur ou égal à 3. Alors:*

$$f(K) = V_3(K) (f(T) + f(H)) - V_2(K) f(H) .$$

Si la multiplication par 2 est injective dans  $A$ , cette formule peut encore s'écrire:

$$f(K) = V_3(K) ((f(T) - f(T^*))/2) + V_2(K) ((f(T) + f(T^*))/2)$$

(les éléments de  $A$ ,  $f(T) - f(T^*)$  et  $f(T) + f(T^*)$ , sont uniquement divisibles par 2).

*Démonstration.* La proposition 1.5 (b) et la proposition 2.5 donnent:

PROPOSITION 4.3.11. Soit  $P$  une partie à trois éléments de  $X$ . On a:

$$(\Delta_P f)(s) = w(P) \varepsilon_P(s) (f(T) + f(H)) .$$

Il en résulte que l'invariant  $K \mapsto f(K) - V_3(K) (f(T) + f(H))$  est de degré inférieur ou égal à 2. On applique alors 4.2.9. Pour conclure il suffit de savoir que  $V_3(T)$  vaut 1 ce qu'on vérifie par exemple avec le diagramme de la figure 1 (la somme au second membre de (4.3.9) ne contient dans ce cas qu'un terme).

#### COMMENTAIRES

Soit  $J_K(t)$  le polynôme de Jones d'un nœud  $K$  [Jo] (rappelons que  $J_K(t)$  appartient à  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ ); on considère dans  $\mathbf{Q}[[u]]$  la série formelle:

$$J_K(e^u) = 1 + j_1(K)u + j_2(K)u^2 + j_3(K)u^3 + \dots .$$

Birman et Lin, et Bar-Natan, ont montré que le coefficient  $j_n$  est un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à  $n$  [BL] [Ba]; l'égalité  $J_{K^*}(t) = J_K(t^{-1})$  se traduit par le fait que  $j_n$  est pair si  $n$  est pair et impair si  $n$  est impair. La proposition 4.3.10 donne (rappelons que l'on a  $J_T(t) = t + t^3 - t^4$ )

$$J_K(e^u) \equiv 1 - 3V_2(K)u^2 - 6V_3(K)u^3 \pmod{u^4} ,$$

ou encore

$$J_K(t) \equiv 1 - 3V_2(K)(t-1)^2 + 3(V_2(K) - 2V_3(K))(t-1)^3 \pmod{(t-1)^4} ,$$

ou enfin

$$J_K^{(2)}(1) = -6V_2(K) ; \quad J_K^{(3)}(1) = 18(V_2(K) - 2V_3(K)) .$$