2. Formalisme relatif aux nœuds de R^3 AU-DESSUS D'UNE IMMERSION GÉNÉRIQUE DE S^1 DANS R^2

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Dans cette note nous traitons «élémentairement» le cas $m \leqslant 3$.

Nous dirons que deux points doubles (au but) x et y de ψ sont enlacés si les 0-sphères $\psi^{-1}(x)$ et $\psi^{-1}(y)$ sont enlacés dans S^1.

PROPOSITION 1.4. *Soient ψ un nœud singulier à m points doubles et f un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à m. S'il existe un point double de ψ qui n'est enlacé avec aucun autre alors $f(\psi)$ est nul.*

Pour une démonstration voir par exemple [Ba].

Soit maintenant ψ un nœud singulier à 2 ou 3 points doubles. Quand ψ a 2 points doubles nous posons $W_2(\psi) = 1$ si ces deux points doubles sont enlacés et $W_2(\psi) = 0$ sinon. Quand ψ a 3 points doubles nous posons $W_3(\psi) = \sup(N-1, 0)$, N désignant le nombre de paires de points doubles enlacés.

La proposition 1.4 et les calculs d'invariants de nœuds singuliers que nous avons donné ci-dessus comme exemples conduisent à l'énoncé suivant:

PROPOSITION 1.5. (a) *La valeur d'un invariant de Vassiliev f de degré inférieur ou égal à* 2 *sur un nœud singulier ψ à 2 points doubles est donnée par*

$$f(\psi) = W_2(\psi) f(T) .$$

(b) *La valeur d'un invariant de Vassiliev f de degré inférieur ou égal à* 3 *sur un nœud singulier ψ à 3 points doubles est donnée par*

$$f(\psi) = W_3(\psi) \big(f(T) + f(H)\big) .$$

2. FORMALISME RELATIF AUX NŒUDS DE $\mathbf{R}^3$ AU-DESSUS D'UNE IMMERSION GÉNÉRIQUE DE S^1 DANS $\mathbf{R}^2$

On reprend le formalisme de [La].

Soit $\alpha: S^1 \to \mathbf{R}^2$ une immersion générique. On note respectivement $\tilde{X}$ et X l'ensemble des points doubles de α à la source et au but. La restriction de $\alpha: \tilde{X} \to X$ est un revêtement (trivial) à deux feuillets dont l'ensemble des sections est noté S. Quand nous serons amenés à faire varier α, nous préciserons ces notations en $\tilde{X}(\alpha)$, $X(\alpha)$, $S(\alpha)$. L'ensemble S est un espace affine sous l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X vu comme un $\mathbf{Z}/2$-espace vectoriel: la différence entre deux sections s et s' est la partie $\{x; s(x) \neq s'(x)\}$. Nous nous autorisons par la suite à identifier $\mathscr{P}(X)$ avec $\{0, 1\}^X$ (alors que l'on préférait considérer $(\mathbf{Z}/2)^X$ dans [La]) ou avec le $\mathbf{Z}/2$-espace vectoriel de base X. On note enfin $\xi \mapsto \xi^*$ l'involution de $\tilde{X}$ associée au revêtement $\tilde{X} \to X$.

Un diagramme de nœud n'est rien d'autre que la donnée $(\alpha; s)$ d'une immersion générique α de S^1 dans $\mathbf{R}^2$ et d'un élément s de $S(\alpha)$. Précisons. A une section s on fait correspondre un «nœud au-dessus de α» de la façon suivante. Soit $\theta_s: S^1 \to \mathbf{R}$ une fonction vérifiant $\theta_s(s(x)) > \theta_s((s(x))^*)$ pour tout x dans X; l'application $\varphi_s = \alpha \times \theta_s: S^1 \to \mathbf{R}^3$ est un plongement dont la classe d'isotopie est indépendante du choix de θ_s.

SECTIONS DESCENDANTES

Soit a un point de $S^1 - \tilde{X}$, on définit une section, notée s_a, du revêtement $\tilde{X} \to X$ de la façon suivante. On munit $S^1 - \{a\}$ de la relation d'ordre induite par un difféomorphisme orienté de $S^1 - \{a\}$ sur $\mathbf{R}$ et on pose $s_a(x) = \inf \alpha^{-1}(x)$. Il est clair que s_a ne dépend que de la composante connexe de a dans $S^1 - \tilde{X}$. Nous appelons ce type de sections des sections descendantes. Le tracé des nœuds correspondants explique cette terminologie; ces nœuds sont triviaux.

RELATION D'ORDRE SUR X INDUITE PAR LE CHOIX D'UN POINT a DE $S^1 - \tilde{X}$

Un point a de $S^1 - \tilde{X}$ étant fixé, on munit X de la relation d'ordre image réciproque de celle de $S^1 - \{a\}$ par la section descendante s_a. On a donc $x < y$, x et y désignant deux points de X, si $\inf \alpha^{-1}(x) < \inf \alpha^{-1}(y)$.

COORDONNÉES SUR S

Soient o un point de S et x un point de X. Nous notons $\delta_{o,x}: S \to \{0, 1\}$ l'application $s \mapsto (s - o)(x)$.

Nous notons $\varepsilon_x: S \to \{\pm 1\}$ l'application $s \mapsto \text{dét}(\alpha'(s(x)), \alpha'((s(x))^*))$ (on identifie α avec une application $\mathbf{Z}$-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$). Cette notation est en accord avec le premier paragraphe: si l'on considère φ_s comme une désingularisation dans $\mathbf{R}^3$ de α on a bien $\varepsilon_x(s) = \varepsilon_x(\varphi_s)$.

Les applications $(\delta_{o,x})_{x \in X}$ et $(\varepsilon_x)_{x \in X}$ doivent être vues comme des coordonnées sur S. Elles sont liées par la relation

$$\varepsilon_x(s) = (-1)^{\delta_{o,x}(s)} \varepsilon_x(o) = (1 - 2\delta_{o,x}(s))\varepsilon_x(o) \,. \tag{2.1}$$

«CALCULUS» DANS A^S

Un invariant des nœuds à valeurs dans A induit une application de S dans A. Aussi aurons-nous besoin d'un peu de «calculus» dans A^S.

Soit f une application de S dans un groupe abélien A. Soit x un point de X, on pose $(\Delta_x f)(s) = f(s+x) - f(s)$. Soit P une partie de X, on note Δ_P l'endomorphisme de A^S composé des endomorphismes Δ_x, x parcourant P. La proposition ci-dessous (dont la vérification est laissée au lecteur) est un genre de formule de Taylor.

Soit u une application $X \to \{0, 1\}$; on note encore u l'application $\mathscr{P}(X) \to \{0, 1\}$ définie par $u(P) = \prod_{x \in P} u(x)$.

PROPOSITION 2.2. *Soit f une application de S dans un groupe abélien A. Pour tout s dans S et tout u dans $\{0,1\}^X$ on a:*

$$f(s+u) = \sum_{P \in \mathscr{P}(X)} u(P)\,(\Delta_P f)(s)\,.$$

Comme à l'ordinaire cet énoncé admet la variante ci-après. On pose $\delta_{o,P}(s) = \prod_{x \in P} \delta_{o,x}(s)$.

PROPOSITION 2.3. *Soit f une application de S dans un groupe abélien A. Pour tout s et tout o dans S on a:*

$$f(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}(X)} \delta_{o,P}(s)\,(\Delta_P f)(o)\,.$$

Réciproquement soient $(c_P)_{P \in \mathscr{P}(X)}$ une famille d'éléments de A indexée par $\mathscr{P}(X)$ et f l'application de S dans A définie par $f(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}(X)} \delta_{o,P}(s)\, c_P$. On vérifie alors que l'on a $(\Delta_P f)(o) = c_P$ ce qui montre que toute application de S dans A s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{P \in \mathscr{P}(X)} \delta_{o,P}\, c_P$. On vérifie que l'on a plus généralement

$$(\Delta_P f)(s) = \Big(\prod_{x \in P}(-1)^{\delta_{o,x}(s)}\Big) \sum_{Q \in \mathscr{P}(X),\, Q \supset P} \delta_{o,Q-P}(s)\, c_Q\,.$$

PROPOSITION-DÉFINITION 2.4. *Soient f une application de S dans un groupe abélien A, m un entier, o un point de S. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\Delta_P f = 0$ *pour toute partie P à $m+1$ éléments de X;*

(ii) $(\Delta_P f)(o) = 0$ *pour toute partie P de X dont le cardinal est strictement supérieur à m.*

Si ces conditions sont vérifiées on dit que f est de degré inférieur ou égal à m.

On pose à nouveau $\varepsilon_P(s) = \prod_{x \in P} \varepsilon_x(s)$. Soit f une application de S dans A de degré inférieur ou égal à m. Compte tenu de (2.1), on peut écrire $2^m f$ sous la forme

$$2^m f = \sum_{P \in \mathscr{P}_{\leqslant m}(X)} \varepsilon_P\, c_P\,,$$

$(c_P)_{P \in \mathscr{P}_{\leqslant m}(X)}$ désignant une famille d'éléments de A indexée par l'ensemble $\mathscr{P}_{\leqslant m}(X)$ des parties de X dont le cardinal est inférieur ou égal à m. Si la multiplication par 2 est injective dans A cette écriture est unique. Si de plus A est un $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$-module alors toute application f de S dans A s'écrit de façon unique sous la forme

$$f = \sum\nolimits_{P \in \mathscr{P}(X)} \varepsilon_P c_P .$$

Dans ces coordonnées (les coordonnées ε_x) on a

$$f(s^*) = \sum\nolimits_{P \in \mathscr{P}(X)} \varepsilon_P(s)(-1)^{|P|} c_P ,$$

s^* désignant l'élément de S défini par $s^*(x) = (s(x))^*$ (l'involution dans $S, s \mapsto s^*$, correspond dans $\mathscr{N}$ à l'image dans un miroir) et $|P|$ désignant le cardinal de P.

DIFFÉRENCES SUCCESSIVES ET NŒUDS SINGULIERS

A cause de la formule (1.1) il peut être avantageux de substituer dans le formalisme précédent à l'endomorphisme Δ_x de A^S l'endomorphisme D_x défini par $(D_x f)(s) = -\varepsilon_x(s)(\Delta_x f)(s)$. On observera que D_x et D_y commutent pour tous x et y dans X et que D_x est de carré nul. On note encore D_P le composé des D_x, x parcourant une partie P de X; D_P et Δ_P sont reliés par la formule $(D_P f)(s) = (-1)^{|P|}\varepsilon_P(s)(\Delta_P f)(s)$.

Soit $\psi_{s,P}$ le nœud singulier obtenu en remplaçant dans la définition de φ_s la fonction θ_s par une fonction $\theta_{s,P}$ vérifiant $\theta_{s,P}(s(x)) = \theta_{s,P}((s(x))^*)$ pour tout x dans P et $\theta_{s,P}(s(x)) > \theta_{s,P}((s(x))^*)$ pour tout x dans $X - P$; la formule (1.1) donne:

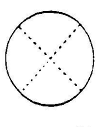
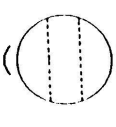
PROPOSITION 2.5. *Soit* $f \colon \mathscr{N} \to A$ *un invariant des nœuds. En notant encore* $f \colon S \to A$ *l'application* $s \mapsto f(\varphi_s)$, *on a:*

$$f(\psi_{s,P}) = (D_P f)(s) = (-1)^{|P|}\varepsilon_P(s)(\Delta_P f)(s) .$$

Cette proposition montre que la définition 2.4 est bien en accord avec la définition 1.3: une application de S dans A induite par un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à m est elle aussi de degré inférieur ou égal à m.

ENLACEMENT DES POINTS DOUBLES DE α

Soit $P = \{x, y\}$ une partie à deux éléments de X on pose $e(P) = 1$ ou 0 suivant que x et y sont enlacés (rappelons que ceci signifie que les 0-sphères $\alpha^{-1}(x)$ et $\alpha^{-1}(y)$ sont enlacés dans S^1) ou non; $e(\{x, y\})$ sera également noté $e(x, y)$. Dans le langage de [Ba], $\alpha^{-1}(P)$ est un diagramme à 2 cordes et on a avec le symbolisme de cet article:

e() = 1 , e() = 0 .