

3. DÉRIVATIONS ET BIDÉRIVATIONS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3. DÉRIVATIONS ET BIDÉRIVATIONS

3.1. *Définitions.* Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz. Une *dérivation* $d: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est une application k -linéaire qui vérifie

$$d([x, y]) = [dx, y] + [x, dy], \quad \text{pour tout } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Une *anti-dérivation* $D: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est une application k -linéaire qui vérifie

$$D([x, y]) = [Dx, y] - [Dy, x] \quad \text{pour tout } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Notons que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie il n'y a pas de différence entre dérivation et anti-dérivation.

Par définition, une *bidérivation* de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'une dérivation d et d'une anti-dérivation D qui vérifient en outre

$$(3.1.1) \quad [x, dy] = [x, Dy], \quad \text{pour tout } x, y \in \mathfrak{g}.$$

3.2. *Bidérivation intérieure.* Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ l'application $\text{ad}(x)$ définie par $\text{ad}(x)(y) = -[y, x]$ est une dérivation et l'application $\text{Ad}(x)$ définie par $\text{Ad}(x)(y) = [x, y]$ est une anti-dérivation. De plus, $(\text{ad}(x), \text{Ad}(x))$ est une bidérivation (cf. 1.1) appelée la *bidérivation intérieure* associée à x .

3.3. *L'algèbre de Leibniz Bider ($\mathfrak{g}$).* L'ensemble des bidérivations de $\mathfrak{g}$ forme un k -module que l'on munit d'un crochet en posant

$$[(d, D), (d', D')] = (dd' - d'd, Dd' - d'D).$$

On peut montrer que, non seulement le membre de droite est bien une bidérivation, mais de plus ce crochet vérifie la relation (L). On a ainsi construit l'algèbre de Leibniz des bidérivations de $\mathfrak{g}$, que l'on note $\text{Bider}(\mathfrak{g})$. On vérifie aisément que

$$\mathfrak{g} \rightarrow \text{Bider}(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto (\text{ad } x, \text{Ad } x)$$

est un morphisme d'algèbres de Leibniz.

4. EXTENSIONS ABÉLIENNES D'ALGÈBRES DE LEIBNIZ ET REPRÉSENTATIONS

Une *algèbre de Leibniz abélienne* est tout simplement une algèbre de Lie abélienne (i.e. $[x, y] = 0$). Par définition une *extension abélienne* d'algèbres de Leibniz est une suite d'algèbres de Leibniz

$$0 \rightarrow M \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$$