§6. Quadratic surds

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

PROBLEM 5. *Let T be a given Möbius map and let $I(T)$ be the associated interval. Let $\zeta \in I(T)$. To compute the Hausdorff dimension of those x for which*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\delta(Tx_n)}{n} = \zeta .$$

Extend this problem to higher dimensions in the spirit of problem 4.

§6. QUADRATIC SURDS

Let x be a real quadratic number. Its continued fraction expansion is ultimately periodic. Let $\pi(x)$ be its period. H. Cohen [3], followed by J. Cusick [4] and Paysant-Leroux [11] studied the action of a Möbius map on the period. They established that

$$\lim_{\pi(x) \to \infty} \sup \frac{\pi(Tx)}{\pi(x)} = R(\Delta)$$

where $R(\Delta)$ is an integer. Furthermore

$$A\, n \ln n \leqslant R(n) \leqslant B\, n \ln n + 1$$

for some constants $A > 0$, $B > 0$. A simple argument then shows that

$$\lim_{\pi(x) \to \infty} \inf \frac{\pi(Tx)}{\pi(x)} = \frac{1}{R(\Delta)} .$$

PROBLEM 6. *Is it true that for all real quadratic irrational x*

$$\sup_n \pi(x^n) = \infty \,?$$

Define the interval

$$J(\Delta) = \left[\frac{1}{R(\Delta)}, R(\Delta)\right] .$$

PROBLEM 7. *Let $\zeta \in J(\Delta)$. Prove the existence of a sequence of real quadratic numbers x_n with strictly increasing period such that*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi(Tx_n)}{\pi(x_n)} = \zeta .$$

Extend this result to higher dimensions as in Problem 4.

PROBLEM 8. *Does there exist a sequence* x_n *of quadratic numbers with strictly increasing period such that for all Möbius map* T

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi(Tx_n)}{\pi(x_n)} = 1 \ ?$$

We believe some of our problems are relatively easy to solve. But quite obviously Problem 1, 2 and maybe 6 are deep.

REFERENCES

[1] BILLINGSLEY, P. *Ergodic Theory and Information.* Wiley 1965.

[2] CHOQUET, G. Répartition des nombres $k(3/2)^n$; et ensembles associés, (English summary) *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 290* (1980), no. 13, A575-A580; Algorithmes adaptés aux suites $(k\theta^n)$ et aux chaines associées, (English summary) *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 290* (1980), no. 16, A719-A724; θ-jeux récursifs et application aux suites $(k\theta^n)$; solenoïdes de T^z, (English summary) *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 290* (1980), no. 19, A863-A868; Construction effective de suites $(k(3/2)^n)$. Etude des mesures (3/2)-stables, (English summary) *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 291* (1980), no. 2, A69-A74; Les fermés (3/2)-stables de T; structure des fermés dénombrables; applications arithmétiques, (English summary) *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 291* (1980), no. 4, A-239-A244; θ-fermés; θ-chaines et θ-cycles (pour $\theta = 3/2$), (English summary) *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292* (1981), no. 1, 5-10; θ-fermés et dimension de Hausdorff. Conjectures de travail. Arithmétique des θ-cycles (où $\theta = 3/2$), (English summary) *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292* (1981), no. 6, 339-344.

[3] COHEN, H. Multiplication par un entier d'une fraction continue périodique. *Acta Arith. 26* (1974), 129-148.

[4] CUSICK, T. Integer multiples of periodic continued fractions. *Pacific J. Math. 78* (1978), 47-60.

[5] DAUDÉ, H. Thèse, Caen 20 Janv. 1993.

[6] DIXON, J.D. The number of steps in the Euclidean algorithm. *J. of Number Theory 2* (1970), 414-422. A simple estimate for the number of steps in the Euclidean algorithm. *Amer. Math. Monthly 78* (1971), 374-376.

[7] HEILBRONN, H. On the average length of a class of finite continued fractions. In *Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis,* Berlin 1968, edited by P. Turàn, 87-96.

[8] LAMÉ, G. Note sur la limite... *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 19* (1844), 867-870.

[9] LÉVY, P. Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard. *Compositio Mathem. 3* (1936), 286-303.

[10] MENDÈS FRANCE, M. Quelques problèmes relatifs à la théorie des fractions continues limitées. *Séminaire de Théorie des Nombres Bordeaux 1971-72,* 4 bis 01-09; Sur les fractions continues limitées, *Acta Arith. 23* (1973), 207-215; The depth of a rational number, in *Topics in Number Theory, Debrecen 1974, Coll. Mathem. Soc. Jànoi Bolyai 13,* 183-194.