

§8. Relation with Cartan's moving frames

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1990)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$c(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ T & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{where} \quad T = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\kappa') (Q - i)$$

and Q is as in §6. It follows that the inversive curvature Q determines the curve up to an orientation preserving inversive automorphism.

§8. RELATION WITH CARTAN'S MOVING FRAMES

Let us sketch a more usual way of obtaining a Frenet lift. The connection with the Schwartzian described here can be found, for example, in Cartan's book [4] and very succinctly in [7]. The canonical line bundle

$$p: \xi \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$$

has a pedestrian description (away from the zero-section) as:

$$\begin{array}{ccc} (z_1, z_2) \in \xi - \{\text{zero section}\} & = & \mathbf{C}^2 - \{0\} \\ \downarrow & p & \downarrow \\ z = \frac{z_1}{z_2} & \leftrightarrow & [z_1, z_2] \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \end{array}$$

Let $\sigma: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^2 \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ be a curve; we choose an arbitrary lift $\hat{\sigma} = (z_1(t), z_2(t))$ and set $f_1 = \lambda \hat{\sigma}$, $f_2 = \dot{f}_1 = \lambda(z_1, z_2) + \lambda(\dot{z}_1, \dot{z}_2)$, where $\dot{} = \frac{d}{dt}$. Thus (f_1, f_2) is a frame in $\mathbf{C}^2$. We try to choose λ so that this frame has area 1. The condition on λ is:

$$\begin{aligned} 1 &= \text{Area}(f_1, f_2) = \text{Area}(\lambda(z_1(t), z_2(t)), \lambda(\dot{z}_1, \dot{z}_2)) \\ &= \lambda^2(z_1 \dot{z}_2 - z_2 \dot{z}_1), \text{ or } 1 = -(\lambda z_2)^2 \dot{z} \end{aligned}$$

Thus $\lambda = \frac{i}{z_2 \sqrt{\dot{z}}}$ will do, and we have

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{i}{\sqrt{\dot{z}}} (z, 1), \\ \text{and } f_2 &= \dot{f}_1 = -\frac{1}{2} i \ddot{z} \dot{z}^{-3/2} (z, 1) + i \dot{z}^{-1/2} (z, 0). \end{aligned}$$

Finally a calculation shows that $\dot{f}_2 = S f_1$, where $S = \frac{3}{4} \ddot{z}^2 \dot{z}^{-2} - \frac{1}{2} \ddot{z} \dot{z}^{-1}$.

Of course S is the *Schwartzian derivative* which this calculation interprets as a "curvature" of σ . Now the Schwartzian S depends on the particular parametrization which is used for the curve. For our purposes we wish to use

inversive arc-length as the parameter, so that the “curvature” S becomes an *intrinsic* invariant of the curve in inversive geometry. And in this case it turns out that S has constant imaginary part. To see this we describe S in terms of the more familiar Euclidean curvature and its derivatives with respect to Euclidean arc-length.

The Euclidean and inversive arc-lengths are related by the equation:

$$dv = |\kappa'|^{1/2} ds, \quad \text{where} \quad ' = \frac{d}{ds}. \quad \text{Thus:}$$

$$\dot{z} = z' |\kappa'|^{-1/2} = e^{i\theta} |\kappa'|^{-1/2},$$

$$\ddot{z} = \text{sgn}(\kappa') e^{i\theta} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\kappa''}{\kappa'^2} + i \frac{\kappa}{\kappa'} \right\},$$

$$\ddot{\dot{z}} = \text{sgn}(\kappa') e^{i\theta} |\kappa'|^{-1/2} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\kappa'''}{\kappa'^2} + \frac{\kappa''^2}{\kappa'^3} - \frac{\kappa^2}{\kappa'} + i \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\kappa \kappa''}{\kappa'^2} \right) \right\}$$

Using these expressions we can calculate the Schwartzian as:

$$\frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{\dot{z}}}{\dot{z}} = \text{sgn}(\kappa') \left\{ \frac{4(\kappa''' - \kappa^2 \kappa') \kappa' - 5\kappa''^2}{16\kappa'^3} - \frac{i}{2} \right\} = \frac{1}{2} \text{sgn}(\kappa') (Q - i)$$

Regarding the vectors f_1 and f_2 as column vectors, we obtain a 2 by 2 matrix $h = (f_2, f_1) \in G$, and according to the calculation above we have:

$$(\dot{f}_2, \dot{f}_1) = (f_2, f_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ S & 0 \end{pmatrix}$$

Thus $h(v)$ and $g(v)$ (cf. §7) are equal up to left multiplication by a constant element of G . This interprets Cartan's canonical frame (f_1, f_2) as the unique frame (up to a constant element of G) forming the columns of a matrix in G which moves the standard curve $y = x^3/6$ to the given curve with contact up to 4th order at the given point.

§9. LOXODROMES

To calculate the curves with Q constant we solve the equation:

$$\frac{dg}{dv} = g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} \varepsilon (Q - i) & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{where} \quad \varepsilon = \text{sgn}(\kappa')$$