II. Application to the Exponential Taylor Polynomials

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

where the degree of g_i *is* $x_i - x_{i-1}$ *and all the roots of* $g_i(x)$ *in* $\bar{\mathbf{Q}}_p$ *have valuation* $-\left(\dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)$.

We call the rational numbers, $\dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$, the slopes of g.

Example. The polynomial f_7 has three factors over $\mathbf{Q}_2$, of degrees 4, 2 and 1, respectively, which have slopes $-3/4$, $-1/2$ and 0.

COROLLARY. *Let* d *be a positive integer. Suppose that* d *divides the denominator of each slope (in lowest terms) of* g. *Then* d *divides the degree of each factor of* g *over* $\mathbf{Q}_p$.

Proof. It suffices to show that d divides the degree of each irreducible factor of g. Let h be such a factor. Let $\alpha \in \bar{\mathbf{Q}}_p$ be a root of h. Since d divides the denominator of the valuation of α (by Theorem NP), it follows that d divides the index of ramification of the extension $\mathbf{Q}_p(\alpha)/\mathbf{Q}_p$ which divides the degree of the extension which equals the degree of h.

II. APPLICATION TO THE EXPONENTIAL TAYLOR POLYNOMIALS

Fix a prime number p.

LEMMA. *Suppose* k *is a positive integer and*

$$k = a_0 + a_1 p + \dots a_s p^s$$

where $0 \leqslant a_i < p$. *Then*

$$\operatorname{ord}(k!) = \frac{k - (a_0 + a_1 + \dots + a_s)}{p - 1}.$$

This is easy and well known.

Now write

$$n = b_1 p^{n_1} + b_2 p^{n_2} + \dots + b_s p^{n_s}$$

where $n_1 > n_2 > \dots > n_s$ and $0 < b_i < p$. Let

$$x_i = b_1 p^{n_1} + \dots + b_i p^{n_i}.$$

LEMMA. *The vertices of the Newton polygon of* f_n *are*

$$(x_i, -\mathrm{ord}_p(x_i!)), \quad 1 < i < s.$$

This follows easily from the previous lemmas.

It follows that the slopes of f are

$$m = \frac{-\mathrm{ord}_p(x_i!) + \mathrm{ord}_p(x_{i-1}!)}{x_i - x_{i-1}} = \frac{-(p^{n_i}-1)}{p^{n_i}(p-1)}.$$

COROLLARY A. *Suppose that* p^m *divides* n. *Then* p^m *divides the degree of each factor of* f_n *over* $\mathbf{Q}_p$.

Proof. Since p^m divides n, $m \leqslant n_s < n_{s-1} < \ldots$. Hence, it follows from (1) that p^m divides the denominator of each m. Therefore the corollary follows from the corollary to Theorem NP.

COROLLARY B. *Suppose that* $p^k \leqslant n$. *Then* p^k *divides the degree of the splitting field of* f_n *over* $\mathbf{Q}_p$.

Proof. The hypotheses imply that $k \leqslant n_1$. Hence p^k divides the denominator of m_1. As above this implies that p^k divides the degree of any extension of $\mathbf{Q}_p$ formed by adjoining a root of f_n with valuation $-m_1$. This yields the corollary.

III. GLOBAL CONCLUSIONS A AND B

A. f_n is irreducible.

Suppose

$$n = \prod_p p^{n_p}$$

is the prime factorization of n. Corollary A implies that, for each prime p, p^{n_p} divides the degree of each factor of f_n over $\mathbf{Q}$. The conclusion follows.

B. Suppose $n/2 < p \leqslant n$ is a prime number. Then G contains a p-cycle.

By Corollary B, p divides the degree of the splitting field of f_n over $\mathbf{Q}_p$ which divides the degree of the splitting field of f_n over $\mathbf{Q}$. Hence p divides the order of G_n. By Cauchy's Theorem G contains an element of order p. The conclusion follows since the only elements of order p in S_n are p-cycles if $p > n/2$.