Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1987)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HOMOLOGIE DE DEGRÉ TROIS D'ALGÈBRES DE LIE SIMPLES DÉPLOYÉES ÉTENDUES À UNE ALGÈBRE COMMUTATIVE

Autor: Cathelineau, J. L.

Kapitel: 1. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87889

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 33 (1987), p. 159-173

HOMOLOGIE DE DEGRÉ TROIS D'ALGÈBRES DE LIE SIMPLES DÉPLOYÉES ÉTENDUES À UNE ALGÈBRE COMMUTATIVE

par J. L. CATHELINEAU

1. INTRODUCTION

Dans toute la suite, k est un corps de caractéristique nulle et A, une k-algèbre commutative avec un élément unité. Si $\mathfrak{g}$ est une k-algèbre de Lie, on lui associe l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g}_A = A \otimes_k \mathfrak{g}$$

où le crochet est défini par

$$[a \otimes x, b \otimes y] = ab \otimes [x, y] .$$

Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, on note $< \, , \, >$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et on l'étend à $\mathfrak{g}_A$ par la formule

$$< a \otimes x, b \otimes y > \; = \; < x, y > \, ab .$$

On note $H_{*,k}(\mathfrak{g}_A)$, l'homologie de $\mathfrak{g}_A$, considérée comme k-algèbre de Lie; $H_{*,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A)$ désigne l'homologie de $\mathfrak{g}_A$, considérée comme k-algèbre de Lie, à coefficients dans $\mathfrak{g}_A$ muni de l'action adjointe.

Remarquons que pour $\mathfrak{g}$ simple, il existe toujours une extension galoisienne, de degré fini (K, k), telle que la K-algèbre de Lie $K \otimes_k \mathfrak{g}$ soit déployée; le type de $\mathfrak{g}$ est défini alors indépendamment de K.

L'homologie du complexe de de Rham de A sur k ([Bo 1])

$$A \xrightarrow{d} \Omega^1_{A/k} \to \dots \to \Omega^n_{A/k} \dots$$

est notée $H^*_{DR}(A)$.

Le but de cet article est de calculer les groupes $H_{3,k}(\mathfrak{g}_A)$ et $H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A)$, pour $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie simple; on renvoie au § 2 pour l'énoncé complet des résultats.

Ces résultats sont à rapprocher des calculs d'homologies suivants ([K]):

$$H_{2,k}(\mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{A/k}/dA$$
$$H_{1,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{A/k},$$

qui sont valables pour une algèbre simple $\mathfrak{g}$ de type arbitraire et une k-algèbre commutative quelconque. D'ailleurs la méthode utilisée ici permet de retrouver simplement ces isomorphismes.

Dans le calcul qui nous concerne, il y a deux cas à considérer suivant le type de $\mathfrak{g}$ et cette distinction s'explique par une propriété géométrique des racines.

Voici deux cas particuliers des théorèmes 1 et 2 du § 2.

PROPOSITION 1. *Avec les hypothèses suivantes:*

(1) A *est une k-algèbre lisse ou un corps extension de* k;

(2) $\mathfrak{g}$ *est une k-algèbre de Lie simple, de type* A_1, B, C, $D_l (l \geqslant 4)$, E, F_4 ou G_2 [1]) *la forme*

$$\Lambda^3_k \mathfrak{g}_A \to A$$
$$au \wedge bv \wedge cw \mapsto <[au, bv], cw> \; = \; <[u, v], w> abc\,, \quad (au = a \otimes u)$$

induit un isomorphisme de k-espaces vectoriels

$$H_{3,k}(\mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} H^0_{DR}(A)\,.$$

PROPOSITION 2. *Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 1, on a*

$$H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) = 0\,.$$

ORIGINE DES RÉSULTATS (voir aussi [Ca 2])

Rappelons d'abord que l'étude de l'homologie des groupes de Lie, considérés comme groupes discrets, est justifiée par plusieurs domaines: fibrés plats, feuilletages, troisième problème de Hilbert, K-théorie algébrique. Citons deux exemples relatifs aux groupes $SO(3, \mathbf{R})$ et $SU(2, \mathbf{C})$:

J. L. Dupont ([D]) a montré, en rapport avec le troisième problème de Hilbert, que $H_2(SO(3, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3) = 0$ équivaut au fait, prouvé par J. P. Sydler ([S]), que l'invariant de Dehn et le volume sont des invariants complets pour la scission des polyèdres de $\mathbf{R}^3$; on ne dispose pas de preuve algébrique directe de la nullité du groupe $H_2(SO(3, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3)$.

---

[1]) Rappelons que $A_1 = B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, $A_3 = D_3$.

Pour $SU(2, \mathbf{C})$, il existe un homomorphisme $H_3(SU(2, \mathbf{C})) \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, construit à l'aide d'une classe de Cheeger-Simons, reliée au volume sur S^3 ([Ch S], [Ch]), dont on sait qu'il ne dépend que des points algébriques de $SU(2, \mathbf{C})$ et a, par suite, une image dénombrable; mais on ignore le rang de cette image; de plus, la question a été posée de savoir si l'application $H_3(SU(2, \bar{\mathbf{Q}})) \to H_3(SU(2, \mathbf{C}))$ est surjective, où $\bar{\mathbf{Q}}$ est la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$.

Les résultats sont reliés à l'aspect « infinitésimal » de ces questions. On prend $A = \mathbf{R}$, $k = \mathbf{Q}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbf{Q})$, l'algèbre des matrices antisymétriques à coefficients rationnels qui est isomorphe à $\mathfrak{su}(2, \mathbf{Q}[\sqrt{-1}])$. Alors $\mathfrak{g}_A = \mathfrak{so}(3, \mathbf{R})$ $(\simeq \mathfrak{su}(2, \mathbf{C}))$.

Comme cas très particuliers des propositions 1 et 2 ci-dessus, on obtient:

i) *Il existe des isomorphismes de* $\mathbf{Q}$*-espaces vectoriels*

$$H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{su}(2, \bar{\mathbf{Q}})) \xrightarrow{\sim} H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{su}(2, \mathbf{C})) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$$

où $\bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$ *est l'ensemble des nombres algébriques réels.*

ii) *Le groupe d'homologie* $H_{2,\mathbf{Q}}(\mathfrak{so}(3, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3)$ *est nul.*

Applications à l'homologie des algèbres de lacets

Pour $\mathfrak{g}$ une algèbre simple complexe, soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de lacets ([Ka])

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbf{C}} \mathfrak{g},$$

considérée comme $\mathbf{C}$-algèbre; on a comme conséquence facile des théorèmes 1 et 2

$$H_3(\tilde{\mathfrak{g}}) \simeq \mathbf{C},$$
$$H_2(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}) = 0,$$

et ceci est indépendant du type de $\mathfrak{g}$.

J'ai bénéficié, pour cet article, des remarques et suggestions de J. Carmona, P. Cartier et Ch. Kassel.

2. Préliminaires et énoncé des résultats

On renvoie à l'article [L Q] de J. L. Loday et D. Quillen, pour la notion d'homologie cyclique d'une algèbre (voir aussi l'article de synthèse [Ca]).

On s'intéresse ici à une notion analogue, où le groupe cyclique est remplacé par le groupe diédrale. Cette notion d'homologie diédrale est due à J. L. Loday ([L]), dont nous utiliserons les notations.