I. SÉRIES RATIONNELLES SUR UN CORPS K

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

$\mathbf{F}_q$ — la méthode banale consistant à calculer les valeurs de $P(x)$ pour x parcourant $\mathbf{F}_q$ nécessite en moyenne près de q évaluations, en calculant l'ordre de la matrice compagnon de P on peut répondre à la question en $O(\text{Log } q)$ opérations.

Quelques ouvrages contiennent une présentation générale des suites récurrentes linéaires, d'abord le livre de E. Lucas [33], ainsi que Bachman [3], Henrici [30] chap. 7 et [29], Montel [47], Pisot [52]. Signalons aussi le livre de Dickson [22] sur l'histoire de la théorie des nombres, le chapitre XVII est consacré aux suites récurrentes linéaires.

A. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

I. Séries rationnelles sur un corps $\mathscr{K}$

Soit une série formelle

$$\Xi(X) = \sum_{n \geqslant 0} \xi_n X^n$$

à coefficients dans un corps (commutatif) $\mathscr{K}$; nous allons étudier différents critères de rationnalité d'une telle série.

1. Supposons Ξ *rationnelle*, c'est-à-dire qu'il existe deux polynômes A et B, à coefficients dans $\mathscr{K}$, tels que

$$\Xi(X) = \frac{A(X)}{B(X)}, \qquad B(0) \neq 0. \tag{1}$$

Soient alors $\omega_1', \dots, \omega_k'$ les racines du polynôme B dans une extension algébrique convenable $\mathscr{L}$ du corps $\mathscr{K}$ et soit τ_i la multiplicité de ω_i' $(i = 1, \dots, k)$.

La décomposition en éléments simples de la fraction A/B est de la forme

$$\frac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\tau_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X - \omega_i')^j}, \tag{2}$$

où $Q(X)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathscr{K}$ (c'est le quotient de la division euclidienne de A par B) et où les α_{ij} appartiennent au corps $\mathscr{L}$.

L'identité formelle, vraie pour tout entier positif j,

$$(X - \omega)^{-j} = (-1)^j \omega^{-j} \sum_{n \geqslant 0} \binom{n+j-1}{j-1} (X \omega^{-1})^n \qquad \left(\text{où } \binom{n}{0} = 1\right)$$

jointe à (1) et (2) conduit à la relation

$$\Xi(X) = Q(X) + \sum_{n \geqslant 0} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\tau_i} (-1)^j \alpha_{ij} \, \omega_i^{n+j} \binom{n+j-1}{j-1} X^n$$

où on a posé $\omega_i = \dfrac{1}{\omega_i'}$ $(i = 1, ..., k)$.

Si Q a pour degré n_0, on a donc

$$\xi_n = P_1(n)\, \omega_1^n + \ldots + P_k(n)\, \omega_k^n \quad \text{pour} \quad n > n_0 , \tag{3}$$

avec

$$P_i(n) = \sum_{j=1}^{\tau_i} (-1)^j \alpha_{ij} \, \omega_i^j \binom{n+j-1}{j-1} . \tag{4}$$

Remarque. Lorsque la caractéristique du corps $\mathscr{K}$ est nulle, chaque P_i est un polynôme (à coefficients dans le corps $\mathscr{L}$) en n de degré plus petit que τ_i, et même égal à $\tau_i - 1$ lorsque la représentation (1) est irréductible. On dit alors que l'expression (3) est un *polynôme-exponentiel.* A ce sujet voir aussi l'exemple 2) plus loin.

2. Réciproquement, supposons maintenant que les relations (3) et (4) aient lieu pour $n > n_0$.

Soit E l'opérateur de décalage (en anglais « shift operator »), qui à une suite $\xi = (\xi_n)_{n \geqslant 0}$ associe la suite $E\xi = (\xi_{n+1})_{n \geqslant 0}$. Nous allons montrer que la suite

$$(E - \omega_1 I)^{\tau_1} \ldots (E - \omega_k I)^{\tau_k} (\xi_n)$$

est ultimement nulle, et plus précisément que $\xi = (\xi_n)_{n \geqslant 0}$ satisfait à l'*équation aux différences finies* à coefficients constants

$$E^{n_0} . \, G(E)\, (\xi_n) = 0 \tag{5}$$

où

$$G(X) = \frac{X^m}{B(0)} B(X^{-1}) = \prod_{i=1}^{k} (X - \omega_i)^{\tau_i} . \tag{5'}$$

Du fait que les opérateurs $E - \omega_i I$ commutent entre eux, il suffit, par linéarité, de vérifier que les suites

$$(E - \omega I)^{j'} \left(\binom{n+j''-1}{j-1} \omega^n \right)$$

sont nulles pour tout triplet d'entiers naturels j, j', j'' vérifiant $j' \geqslant j \geqslant 1$

et $j'' \geqslant j$. Raisonnons par récurrence sur j'. Ce résultat est clair pour $j' = 1$. Supposons $j' > 1$ et l'assertion vraie jusqu'à l'ordre $j'-1$. La relation

$$\begin{aligned}(E-\omega I)\left(\left(\tbinom{n+j''-1}{j-1}\omega^n\right)\right) &= \left(\left(\left(\tbinom{n+j''}{j-1}-\tbinom{n+j''-1}{j-1}\right)\right)\omega^{n+1}\right)\\ &= \left(\left(\tbinom{n+j''-1}{j-2}\omega^{n+1}\right)\right) = \omega\left(\left(\tbinom{n+j''-1}{j-2}\omega^n\right)\right)\end{aligned}$$

permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui prouve le résultat annoncé.

Si on pose en (5)

$$G(X) = X^m - a_{m-1}X^{m-1} - \dots - a_0\,, \qquad m = \sum_{i=1}^{k} \tau_i\,, \tag{6}$$

on a donc démontré que la suite (ξ_n) vérifie la condition

$$\xi_{n+m} = a_{m-1}\,\xi_{n+m-1} + \dots + a_0\,\xi_n \quad \text{pour} \quad n > n_0\,, \tag{7}$$

c'est donc — par définition — une *suite récurrente linéaire* (en abrégé: s.r.l.); le polynôme $X^{n_0}G(X)$ sera appelé *échelle de récurrence* [1]) ou *polynôme caractéristique* et l'entier (n_0+m) *ordre* de la s.r.l. (ξ_n) (il s'agit d'un abus de langage car ces objets ne sont pas uniques; voir plus avant).

Supposons enfin que la relation (7) ait lieu. On vérifie alors aisément que l'expression

$$\Big(\sum_{n\geqslant 0} \xi_n X^n\Big)\,(a_0X^m + a_1X^{m-1} + \dots + a_{m-1}X - 1)$$

est un polynôme en X de degré au plus $n_0 + m$. La série $\Xi(X) = \sum_{n\geqslant 0} \xi_n X^n$ est alors une fraction rationnelle de la forme (1), ce qui achève la preuve de l'équivalence logique des trois objets considérés.

II. Quelques exemples

Ce paragraphe contient un certain nombre d'exemples variés qui illustrent les résultats généraux que nous venons de présenter. De plus de nombreux exemples figurent dans tout bon livre sur le calcul aux différences finies ou sur la combinatoire (entre autres [21], [26], [29], [30], [46]).

1) L'exemple le plus populaire de s.r.l. et aussi le plus ancien (il date de 1202) est la suite (F_n) de Fibonacci définie par les conditions

$$F_0 = 0\,, \quad F_1 = 1\,, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0$$

---

1) C'est la terminologie de E. Lucas [33].