

Deuxième partie: \$P^5\$, \$P^6\$, \$P^7\$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Deuxième partie: $\mathbf{P}^5$, $\mathbf{P}^6$, $\mathbf{P}^7$

IV) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^5$

Soit V une surface non-singulière de $\mathbf{P}^5$. Outre les invariants n, d, t de V comme dans $\mathbf{P}^4$, soit δ le nombre de points-doubles impropres apparents de V , i.e. le nombre de points-doubles impropres de la projection V' de V sur un $\mathbf{P}^4$ générique de $\mathbf{P}^5$.

Nous allons voir au paragraphe 1 que toute formule trisécante pour V dans $\mathbf{P}^5$ est de la même forme que pour V' dans $\mathbf{P}^4$, avec un terme supplémentaire $\delta(un+v)$ où u et v sont des constantes.

On en déduira au paragraphe 2 trois formules trisécantes dans $\mathbf{P}^5$: les tangentes d'inflexion de V , les tangentes à V recoupant V ainsi qu'un $\mathbf{P}^3$ fixé, les trisécantes à V coupant un $\mathbf{P}^2$ fixé.

1°) RETOUR À $\mathbf{P}^4$

a) Soit V une surface non-singulière de $\mathbf{P}^5$ et projetons-la génériquement en V' sur un hyperplan H . Par le procédé de construction de I.3.a, on voit qu'il existe un schéma relatif $\Phi/\mathbf{C}$ avec fibres

$$\Phi_1 = V \quad \text{et} \quad (\Phi_0)_{\text{red}} = V'.$$

On peut énoncer les deux propositions suivantes, dont les démonstrations sont analogues — mais plus simples — à celles des propositions 3 et 4, en ce sens qu'il suffit de se ramener à un modèle local, comme dans l'Annexe 3. (Ce modèle local correspond à V formé de deux plans disjoints dans $\mathbf{P}^5$, soit V' formé de deux plans transverses dans H .) Nous laissons les détails au lecteur; on peut aussi consulter [23] où la situation est tout à fait analogue.

On désignera les points singuliers de V' par $N_1, N_2, \dots, N_\delta$.

PROPOSITION 8. *Avec les notations précédentes, on a l'égalité de sous-schémas de $\mathbf{P}^5$:*

$$\Phi_0 = V' \cup N_1^{(1)} \cup \dots \cup N_\delta^{(1)}$$

où $N_i^{(1)}$ désigne le premier voisinage infinitésimal de N_i dans $\mathbf{P}^5$. De plus, $V' = (\Phi_0)_{\text{red}} = \Phi_0 \cap H$.

PROPOSITION 9. Soit $\Phi/\mathbb{C}$ le schéma relatif associé à V comme ci-dessus.

Alors

- i) Pour $k \geq 3$ tout k -uplet curviligne dans Φ_0 de support un des points singuliers $\{N\}$ de V' est limite de k -uplets doubles dans Φ_0 (notations de la définition 2).
- ii) Tout k -uplet curviligne dans Φ_0 est limite de k -uplets curvilignes dans des fibres Φ_λ de $\Phi/\mathbb{C}$ avec $\lambda \neq 0$.
- iii) $\text{Hilb}^2 \Phi_0$ est réduit au voisinage d'un doublet d de support un point singulier $\{N\}$ lorsque $d \not\subset V'$.

Ceci étant, afin d'étudier les composantes irréductibles de $\text{Hilb}_c^3 \Phi_0$, nous donnons la

Définition 3. Pour $j = 1, 2, \dots, \delta$ notons $\overline{U_j}$ l'adhérence dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbb{P}^5$ de la partie U_j formée des triplets $d \cup m$ où

d est un doublet de $\mathbb{P}^5$ de support $\{N_j\}$,

m est un point simple de $V' - \{N_j\}$.

Bien entendu, $\overline{U_j}$ est dans $(\text{Hilb}_c^3 \Phi_0)_{\text{red}}$, d'après la structure nilpotente de Φ_0 donnée par la proposition 8. On a alors la

PROPOSITION 10.

- i) $(\text{Hilb}_c^3 \Phi_0)_{\text{red}}$ est réunion des $\overline{U_j}$ et de $(\text{Hilb}_c^3 V')_{\text{red}}$;
- ii) $\text{Hilb}_c^3 \Phi_0$ est génériquement réduit le long des $\overline{U_j}$ et $\text{Hilb}_c^3 V'$.

Preuve.

i) Soit t un triplet curviligne contenu dans Φ_0 . Si t est dans H , comme $\Phi_0 \cap H = V'$, on a $t \in (\text{Hilb}_c^3 V')_{\text{red}}$. Si maintenant t n'est pas dans H , le support de t ne peut être formé de trois points distincts; il contient forcément un des points N_j , car en dehors de ces points, on a $\mathcal{O}_{\Phi_0}$ égal à $\mathcal{O}_{V'}$. D'autre part, toujours puisque $t \not\subset H$, la multiplicité de t en l'un des N_j est strictement plus grande que 1. Si le support de t est réduit à $\{N_j\}$, d'après la proposition 9 i), on a $t \in \overline{U_j}$. Sinon, $\text{Supp } t = \{N_j, m\}$ où $m \in V' - \{N_j\}$. Les multiplicités de t en N_j et m sont 2 et 1; ainsi $t \in U_j$.

ii) $\text{Hilb}_c^3 V'$ est en fait réduit d'après l'Annexe 1. Si maintenant $d \cup m \in U_j$ est générique, on a $d \not\subset H$, d'où $\text{Hilb}^2 \Phi_0$ réduit au voisinage de d (proposition 9 iii); par suite U_j est réduit au voisinage de $d \cup m$. La proposition 10 est ainsi prouvée.

Rappelons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 (11) & Al^3 \mathbf{P}^5 & \xhookrightarrow{i} & Hilb_c^3 \mathbf{P}^5 & (15) \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & Hilb_c^3 V & (6)
 \end{array}$$

où les dimensions sont indiquées entre parenthèses.

Une formule trisécante pour V dans $\mathbf{P}^5$ exprime le degré du 0-cycle

$$Z \cdot i^* [Hilb_c^3 V]$$

où Z est un cycle de $A^2(Al^3 \mathbf{P}^5)$ fixé. Nous allons voir en d) qu'il suffit d'évaluer le degré de $Z \cdot i^* [Hilb_c^3 \Phi_0]$, soit d'après la proposition qui précède :

$$Z \cdot i^* [Hilb_c^3 V'] + \sum_{1 \leq j \leq 8} Z \cdot i^* [\overline{U_j}].$$

b) *Evaluation de $Z \cdot i^* [Hilb_c^3 V']$*

Cette évaluation est analogue à celle effectuée en II.2.a. Comme V' est contenu dans $\mathbf{P}^4$, regardons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 (11) & Al^3 \mathbf{P}^5 & \xhookrightarrow{i} & Hilb_c^3 \mathbf{P}^5 & (15) \\
 & \uparrow j & & \uparrow u & \\
 (9) & Al^3 \mathbf{P}^4 & \xhookrightarrow{\hat{i}} & Hilb_c^3 \mathbf{P}^4 & (12) \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & Hilb_c^3 V' & (6)
 \end{array}$$

où les flèches sont les injections canoniques. Par l'Annexe 7, $Al^3 \mathbf{P}^4$ est *intersection schématique* de $Al^3 \mathbf{P}^5$ et $Hilb_c^3 \mathbf{P}^4$.

Or $Hilb_c^3 V'$ peut être considéré comme sous-variété de $Hilb_c^3 \mathbf{P}^4$; appliquons alors la formule de Fulton-MacPherson (II.2) à $\alpha = [Hilb_c^3 V']$ dans $A^*(Hilb_c^3 \mathbf{P}^4)$. On obtient

$$i^* u_* \alpha = i^* [Hilb_c^3 V'] = j_* C$$

où $C = \hat{i}^* [Hilb_c^3 V'] \cdot c_1$ avec c_1 dans $A^1(Al^3 \mathbf{P}^4)$. Par suite, par la formule des projections, on a dans $A^*(Al^3 \mathbf{P}^5)$:

$$Z \cdot i^* [Hilb_c^3 V'] = j_* (j^* Z \cdot c_1 \cdot \hat{i}^* [Hilb_c^3 V']).$$

Mais $j^*Z \cdot c_1$ est un cycle fixé dans $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$ et donc

$$\deg j^*Z \cdot c_1 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V']$$

représente une *formule trisécante* pour la surface V' de $\mathbf{P}^4$. Ce nombre est donc (proposition 5) de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma)$$

où n , t et d sont les invariants de V (donc de V') et a_1 , a_2 , a_3 , α , β et γ des constantes.

c) *Evaluation de $Z \cdot i^* [\overline{U}_j]$*

Pour cela, fixons j entre 1 et δ et soit $N = N_j$, $\overline{U} = \overline{U}_j$. Soit I l'intersection $\overline{U} \cap Al^3 \mathbf{P}^5$ dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^5$. La sous-variété I , de dimension 2, est formée des triplets alignés de $\mathbf{P}^5$ dont l'axe passe par N , doubles en N et avec un troisième point sur V' .

LEMME 8. *L'intersection $\overline{U} \cap Al^3 \mathbf{P}^5$ est génériquement transverse dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^5$.*

Preuve. C'est un simple calcul en coordonnées; voir l'Annexe 4.

Le lemme montre ainsi l'égalité $i^* [\overline{U}] = [I]$ dans $A^9(Al^3 \mathbf{P}^5)$. Maintenant, pour connaître $i^* [\overline{U}] \cdot Z$, il suffit évidemment d'évaluer $[I] \cdot Z$ pour Z décrivant une base de $A_{\mathbf{Q}}^2(Al^3 \mathbf{P}^5)$. Or la proposition 7 en donne une explicitement. Soit $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux hyperplans de $\mathbf{P}^5$ et soit $[H_1]$ et $[H_2]$ les cycles associés dans $A^1(Al^3 \mathbf{P}^5)$ et $A^2(Al^3 \mathbf{P}^5)$. On a l'égalité des espaces vectoriels:

$$A_{\mathbf{Q}}^2(Al^3 \mathbf{P}^5) = \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^2(G) \oplus \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^1(G) \cdot [H_1] \oplus \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^0(G) \cdot [H_2]$$

où $G = G(1, 5)$. Distinguons alors trois cas.

i) $Z \in \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^2(G)$

Une base de $A^2(G)$ est formée des cycles de Schubert (notations de [21]):

$$\begin{cases} (3, 4): \text{droites contenues dans un hyperplan fixé de } \mathbf{P}^5, \\ (2, 5): \text{droites coupant un plan fixé } P \text{ de } \mathbf{P}^5. \end{cases}$$

On a alors $\text{Axe}^*(2, 5) \cdot [I] = \varepsilon(n-2)$ où ε est un entier > 0 . En effet, $P \cap \mathbf{P}^4$ est une droite Δ de $\mathbf{P}^4$ et N et Δ engendrent un plan π passant

par N . Ce plan recoupe V' en $n - 2$ autres points. (Le plan π coupe bien V' au voisinage de N en un triplet, premier voisinage infinitésimal de N dans π ; mais un plan voisin générique ne le coupe qu'en un doublet. Le plan π recoupe donc V' en $n - 2$ points et non pas $n - 3$). La multiplicité éventuelle ε est en fait 1, comme il résultera de 2.a).

Par contre, on a $\text{Axe}^*(3, 4) \cdot [I] = 0$ car l'axe de tout triplet de I passe par N , qui n'est pas dans l'hyperplan fixé.

$$\text{ii) } Z \in \text{Axe}^* A_{\mathbb{Q}}^1(G) \cdot [H_1]$$

Le cycle $(3, 5)$ des droites coupant un solide fixé de $\mathbf{P}^5$ engendre $A_{\mathbb{Q}}^1(G)$. On a

$$\text{Axe}^*(3, 5) \cdot [H_1] \cdot [I] = \varepsilon n.$$

En effet, le solide coupe $\mathbf{P}^4$ en un plan P ; N et P engendrent donc un $\mathbf{P}^3$ dans $\mathbf{P}^4$. Dans ce $\mathbf{P}^3$, il y a la courbe $C = V' \cap \mathbf{P}^3$ et le plan $\mathcal{H}'_1 = \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{P}^3$. Bien sûr, N n'étant pas sur $\mathcal{H}_1$, n'est pas sur $\mathcal{H}'_1$. On cherche donc les triplets doubles en N , le troisième point étant sur $\mathcal{H}'_1 \cap C$. Il y en a donc n , avec une multiplicité éventuelle.

$$\text{iii) } Z \in \text{Axe}^* A_{\mathbb{Q}}^0(G) \cdot [H_2]$$

Le triplet double en N devant avoir deux points sur $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ (par définition de $[H_2]$), on a

$$1 \cdot [H_2] \cdot [I] = 0$$

puisque N n'appartient ni à $\mathcal{H}_1$ ni à $\mathcal{H}_2$.

Ceci prouve que pour tout Z dans $A_{\mathbb{Q}}^2(\text{Al}^3 \mathbf{P}^5)$, le degré du 0-cycle $i^* [\overline{U_j}] \cdot Z$ est de la forme $un + v$ où u et v sont des constantes ne dépendant que de Z .

d) *Conclusion.* Soit V une surface non-singulière de $\mathbf{P}^5$ et $\Phi/\mathbf{C}$ le schéma relatif associé (IV.1.a). Si on pose $\bar{U} = \mathbf{C}$ et $U = \mathbf{C}^*$, les hypothèses de la proposition 1 sont vérifiées pour $\Phi/\mathbf{C}$. Pour a) cela résulte de la proposition 9 ii). Pour b), de la proposition 10 ii). Enfin $\Phi/\mathbf{C}^*$ est k -plat, car isomorphe au produit $V \times \mathbf{C}^*$ (voir remarque 1). On peut ainsi appliquer la proposition 1.

On a donc l'équivalence rationnelle dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^5$:

$$[\text{Hilb}_c^3 V] \sim [(\text{Hilb}_c^3 \Phi_0)_{\text{red}}] = [\text{Hilb}_c^3 \Phi_0].$$

D'où, par la proposition 10, l'équivalence rationnelle

$$[\text{Hilb}_c^3 V] \sim [\text{Hilb}_c^3 V'] + \sum_{j=1}^{\delta} [\overline{U_j}].$$

En regardant alors les évaluations faites en b) et c), il vient la

PROPOSITION 11. Soit V une surface non-singulière de $\mathbf{P}^5$, d'invariants (n, d, t, δ) . Pour tout cycle Z de $A^2(Al^3 \mathbf{P}^5)$, la formule trisécante donnant le degré du 0-cycle

$$Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$$

est de la forme

$$T(V) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)$$

où $a_1, a_2, \dots, v$ sont des constantes ne dépendant que de Z .

2°) TROIS FORMULES

a) Pour une surface V de $\mathbf{P}^5$, commençons par regarder le nombre de trisécantes à V rencontrant un plan π fixé. Par définition, ce nombre $T(V)$ est le degré du 0-cycle $\text{Axe}^* \sigma_2 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$ où comme toujours

$$i: Al^3 \mathbf{P}^5 \hookrightarrow \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^5$$

est l'injection canonique et $\sigma_2 \in A^2(G(1, 5))$, le cycle des droites coupant un plan fixe.

Vu la proposition 11, ce nombre est de la forme

$$T(V) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)$$

où n, d, t, δ sont les invariants de V .

Soit alors $\tilde{V}$ la réunion de V et d'un plan P disjoint. On constate que $\text{Hilb}_c^3 \tilde{V}$ est formé de quatre « composantes » disjointes, avec des notations évidentes:

$$\text{Hilb}_c^3 V, \quad \text{Hilb}^2 V \times P, \quad V \times \text{Hilb}^2 P, \quad \text{Hilb}_c^3 P.$$

Quelle va être la contribution de chacune de ces composantes dans $T(\tilde{V})$?

Pour la première et la dernière, c'est clair: c'est respectivement $T(V)$ et $T(P) = a_1$ (car pour P , $n = 1, d = t = \delta = 0$). La troisième composante n'apporte aucune contribution puisqu'elle est disjointe de $Al^3 \mathbf{P}^5$: un triplet aligné ayant deux points dans P est dans P puisque $P \cap V = \emptyset$.

Reste à trouver la contribution de la deuxième composante. C'est le nombre de sécantes à V coupant à la fois les plans P et π . Mais si $\sigma_2 = (2, 5)$ est le cycle dans $A^*(G(1, 5))$ des droites coupant un plan fixe, la formule de Pieri donne

$$\sigma_2^2 = (0, 5) + (1, 4) + (2, 3).$$

On obtient donc $\text{Axe}^* \sigma_2 \cdot i^* [\text{Hilb}^2 V \times P]$ comme somme du

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) nombre de sécantes à } V \text{ passant par un point fixe de } \mathbf{P}^5, \\ \text{ii) nombre de sécantes à } V \text{ contenues dans un } \mathbf{P}^4 \text{ et coupant une droite} \\ \text{de ce } \mathbf{P}^4, \\ \text{iii) nombre de sécantes à } V \text{ contenues dans un } \mathbf{P}^3. \end{array} \right.$$

Ces trois nombres sont respectivement :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \delta, \text{ car c'est le nombre de points-doubles impropres de la projection} \\ \text{de } V \text{ sur un } \mathbf{P}^4, \\ \text{ii) } d, \text{ car c'est le nombre de points-doubles de la courbe } V \cap \mathbf{P}^4 \text{ projetée} \\ \text{sur un } \mathbf{P}^2 \text{ par une droite de } \mathbf{P}^4 \text{ (et le lieu double } \Gamma \text{ de } V \text{ projeté} \\ \text{sur un } \mathbf{P}^3 \text{ par une droite de } \mathbf{P}^5 \text{ est de degré } d), \\ \text{iii) } \binom{n}{2}, \text{ car il s'agit de trouver une droite passant par deux des} \\ n \text{ points de } V \cap \mathbf{P}^3. \end{array} \right.$$

Les multiplicités sont toutes 1 car P est choisi générique. Ainsi on a $T(\tilde{V}) = T(V) + a_1 + \delta + d + \binom{n}{2}$, soit encore, puisque les invariants de $\tilde{V}$ sont (lemme 13, Annexe 5)

$$\tilde{n} = n + 1, \quad \tilde{d} = d + n, \quad \tilde{t} = t + d, \quad \tilde{\delta} = \delta + n,$$

la relation

$$a_1(n+1) + a_2 \binom{n+1}{2} + a_3 \binom{n+1}{3} + \alpha(t+d) + (d+n)(\beta(n+1) + \gamma)$$

$$+ (\delta+n)(u(n+1) + v) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma)$$

$$+ \delta(un + v) + a_1 + \delta + d + \binom{n}{2}.$$

Mais l'Annexe 5 permet d'identifier et on obtient donc par

— identification de $\delta: u = 1$,

— identification de $d: \alpha + \beta = 1$.

— identification de $n: \begin{cases} -\gamma - v = a_2 - a_3 + 1 & (n = -1) \\ a_2 + 2\beta + \gamma + 2u + v = 0 & (n = 1) \end{cases}$.

Il reste alors à trouver quatre autres équations. On remarque d'abord que ni un plan ni une quadrique de $\mathbf{P}^3$ (plongée dans $\mathbf{P}^5$) n'ont de trisécante coupant un plan fixe, d'où $T = 0$ pour ces deux surfaces. Par suite, $a_1 = 2a_1 + a_2 = 0$.

Maintenant, soit $S(2, 2) \subset \mathbf{P}^4$ l'intersection complète de deux quadriques et considérons-la comme plongée dans $\mathbf{P}^5$. On a $T = 0$ pour cette surface car pour raison de degré, une trisécante est l'une des 16 droites qu'elle contient et aucune ne coupe le plan π fixé. De même la surface de Veronese (plongement de $\mathbf{P}^2$ dans $\mathbf{P}^5$ par $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)$) est intersection de quadriques et ne contient pas de droite. On a donc aussi $T = 0$ pour cette surface. Leurs invariants (n, d, t, δ) étant respectivement $(4, 2, 0, 0)$ et $(4, 3, 1, 0)$ (cf. Annexe 6), on obtient les deux équations

$$\begin{cases} 4a_1 + 6a_2 + 4a_3 + 8\beta + 2\gamma = 0 \\ 4a_1 + 6a_2 + 4a_3 + \alpha + 12\beta + 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Jointes aux équations précédentes, on obtient un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = 0 & a_2 = 0 & a_3 = 1 & \alpha = 2 \\ \beta = -1 & \gamma = 2 & u = 1 & v = -2. \end{cases}$$

On a donc montré le

THÉORÈME 3. Soit V une surface de $\mathbf{P}^5$ d'invariants (n, d, t, δ) . Alors le degré du 0-cycle $\text{Axe}^* \sigma_2 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$ de $Al^3 \mathbf{P}^5$ (nombre de trisécantes à V coupant un plan fixe) est

$$\binom{n}{3} + 2t + (n-2)(\delta-d).$$

Remarque. On trouve ainsi, par exemple, 0 pour la surface intersection complète de trois quadriques, ce qui est évident.

b) Cherchons maintenant le nombre de tangentes à V recoupant V et un $\mathbf{P}^3$ fixé de $\mathbf{P}^5$. C'est le degré $T(V)$ du 0-cycle

$$[\mathcal{D}] \cdot \text{Axe}^* \sigma_1 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$$

où $\sigma_1 \in A^1(G(1, 5))$ est le cycle des droites coupant un $\mathbf{P}^3$ fixé et $\mathcal{D}$ l'hyper-surface de $Al^3 \mathbf{P}^5$ formée des triplets non simples.

Toujours d'après la proposition 11, ce nombre est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v).$$

Comme en a), soit $\tilde{V}$ la réunion de V et P où P est un plan disjoint de V . On a $\text{Hilb}_c^3 \tilde{V}$ comme réunion disjointe de

$$\text{Hilb}_c^3 V, \quad \text{Hilb}^2 V \times P, \quad V \times \text{Hilb}^2 P, \quad \text{Hilb}_c^3 P.$$

Les contributions des première, troisième et quatrième composantes dans $T(V)$ sont, comme en a), respectivement: $T(V)$, 0 et $T(P) = a_1$.

Reste à trouver la contribution de la deuxième composante. Ce sont les tangentes à V coupant à la fois P et le $\mathbf{P}^3$ fixé. Mais dans $A^1(G(1, 5))$, par la formule de Pieri, on a

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (1, 5) + (2, 4).$$

De sorte que cette contribution se décompose en

- les tangentes à V coupant une droite de $\mathbf{P}^5$: c'est le nombre v de points-pince d'une projection sur un $\mathbf{P}^3$ par une droite de $\mathbf{P}^5$,
- les tangentes à la courbe $V \cap \mathbf{P}^4$ rencontrant un $\mathbf{P}^2$ fixé de ce $\mathbf{P}^4$: c'est la classe de cette courbe, donnée par $n(n-1) - 2d$ ([34], p. 190).

Les multiplicités sont 1 car P est choisi générique. Comme on a $v = 2d - 2\delta$ (Annexe 6), on trouve donc finalement la relation

$$T(\tilde{V}) = T(V) + a_1 + n(n-1) - 2\delta.$$

En l'écrivant explicitement, vu que (Annexe 5) $\tilde{n} = n + 1$, $\tilde{d} = d + n$, $\tilde{t} = t + d$, $\tilde{\delta} = \delta + n$, on obtient en identifiant les termes

— en δ : $u = -2$,

— en d : $\alpha + \beta = 0$,

— en n :
$$\begin{cases} -\gamma - v = a_2 - a_3 + 2 & (n = -1) \\ a_2 + 2\beta + \gamma + 2u + v = 0 & (n = 1) \end{cases}.$$

Il reste donc à trouver quatre autres équations. Soit $S(a, b, c)$ l'intersection complète de trois hypersurfaces de degrés a, b, c . Les quatre surfaces suivantes de $\mathbf{P}^5$ n'ont pas de trisécante rencontrant un $\mathbf{P}^3$ fixé: $S(2, 2, 1)$, $S(2, 2, 2)$, la surface de Veronese et enfin la surface de del Pezzo S_5 : c'est l'éclaté de $\mathbf{P}^2$

en quatre points, plongé dans $\mathbf{P}^5$ par le système linéaire des cubiques passant par ces quatre points; S_5 est intersection de quadriques et contient 10 droites de self-intersection -1 .

Pour raison de degré, on a $T = 0$ pour ces quatre surfaces. D'où (par l'Annexe 6) quatre nouvelles équations.

Jointes aux quatre équations précédentes, on obtient un système inversible dont la solution est :

$$\begin{cases} a_1 = 6 & a_2 = 4 & a_3 = -18 & \alpha = -12 \\ \beta = 12 & \gamma = -36 & u = -2 & v = 12 \end{cases}.$$

On a donc montré le

THÉOREME 4. Soit V une surface de $\mathbf{P}^5$ d'invariants (n, d, t, δ) . Alors le degré du 0-cycle

$$[\mathcal{D}] \cdot \text{Axe}^* \sigma_1 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$$

(nombre de tangentes à V recoupant V et un $\mathbf{P}^3$ fixé) est

$$-n(3n^2 - 11n + 2) + 12(d(n-3) - t) - 2\delta(n-6).$$

c) Enfin, cherchons pour V dans $\mathbf{P}^5$ le nombre de tangentes d'inflexion de V . Pour définir précisément ce nombre, notons que dans $\text{Hilb}^3 \mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^3$, les triplets de support un point forment une cubique gauche $\mathcal{T}_0$. (C'est le plongement de Veronese $I \mapsto I^3$ de $\text{Hilb}^1 \mathbf{P}^1$ dans $\text{Hilb}^3 \mathbf{P}^1$). On a donc une sous-fibration $\mathcal{T}$ de $Al^3 \mathbf{P}^5$ de fibre $\mathcal{T}_0$ et donc $[\mathcal{T}]$ est dans $A^2(G(1, 5))$.

On définit le nombre de tangentes d'inflexion de V comme le degré $T(V)$ du 0-cycle $[\mathcal{T}] \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$ où comme d'habitude $i: Al^3 \mathbf{P}^5 \hookrightarrow \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^5$ est l'injection canonique. D'après la proposition 11, $T(V)$ est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v).$$

Comme précédemment, on regarde la surface $\tilde{V} = V \cup P$ où P est un plan disjoint. Un triplet de support un point est dans $\tilde{V}$ si et seulement si il est dans V ou dans P . Donc

$$T(\tilde{V}) = T(V) + a_1$$

car $T(P) = a_1$. En identifiant, comme en a) et b), il vient

$$\begin{cases} u = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + 2\beta + \gamma + 2u + v = 0 \\ -\gamma - v = a_2 - a_3 \end{cases} \quad \begin{matrix} (n=1) \\ (n=-1) \end{matrix}.$$

Reste à trouver quatre autres équations. Or on a démontré ([26], 4.d) qu'une droite isolée de V contribue dans $T(V)$ de $-3(2+l)$ où $l \in \mathbf{Z}$ est sa self-intersection. Les quatre surfaces $S(2, 2, 1)$, $S(2, 2, 2)$, Veronese et del Pezzo S_5 (vues en b) contiennent respectivement 16, 0, 0, 10 droites et elles sont de self-intersection -1 . Comme ces quatre surfaces sont des intersections de quadriques dans $\mathbf{P}^5$, elles n'ont pas d'autre trisécante que les droites qu'elles contiennent; ainsi pour ces surfaces, T est égal respectivement à $-48, 0, 0, -30$. On obtient donc comme en b) quatre nouvelles équations. Jointes aux quatre précédentes, on obtient un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = 18 & a_2 = -48 & a_3 = 24 & \alpha = 12 \\ \beta = -12 & \gamma = 84 & u = 0 & v = -12 . \end{cases}$$

On a donc démontré le

THÉORÈME 5. *Soit V une surface de $\mathbf{P}^5$ d'invariants (n, d, t, δ) . Alors le degré du 0-cycle $[\mathcal{T}] \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$ (nombre de tangentes d'inflexion de V) est*

$$2n(2n^2 - 18n + 25) + 12(t - \delta - d(n - 7)) .$$

De plus, si V contient un nombre fini de droites, la « contribution » d'une droite de self-intersection l dans ce nombre est $-3(2+l)$.

V) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^N$, $N > 5$

Naturellement, seuls les cas $N = 6$ et $N = 7$ vont nous intéresser car au-delà, il n'y a génériquement plus de trisécante à une surface.

1°) RETOUR À $\mathbf{P}^5$

Nous allons voir qu'une formule trisécante pour une surface de $\mathbf{P}^N$, $N > 5$, est de la même forme qu'une formule trisécante pour une surface de $\mathbf{P}^5$. Précisément, on a la

PROPOSITION 12. *Soit $N = 6$ ou $N = 7$. Soit V une surface non-singulière de $\mathbf{P}^N$, n son degré, δ le nombre de points-doubles impropres apparents au-dessus d'un $\mathbf{P}^4$, d le degré de la courbe double apparente au-dessus d'un $\mathbf{P}^3$ et t son nombre de points-triples.*

Alors toute formule trisécante pour V est, comme dans $\mathbf{P}^5$, de la forme

$$T(V) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)$$

où $a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta, \gamma, u$ et v sont des constantes.

Preuve. Elle consiste à appliquer le théorème de Fulton-MacPherson comme on l'a déjà fait en (IV.1.b), pour se ramener à $\mathbf{P}^5$.

Soit en effet $\mathbf{P}^5$ fixé dans $\mathbf{P}^N$ et projetons génériquement V dans $\mathbf{P}^5$ (par un point si $N = 6$, par une droite si $N = 7$). La projection est un isomorphisme de V sur l'image, notée $\hat{V}$. Comme toujours (voir I.3.a), on a dans $\mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$ un sous-schéma relatif $\mathcal{V}/\mathbf{C}$ (qui dans ce cas est isomorphe à un produit puisque $\hat{V}$ n'acquiert pas de singularité par projection) avec $\mathcal{V}_1 = V$ et $\mathcal{V}_0 = \hat{V}$.

On a donc dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$ un sous-schéma relatif $\text{Hilb}_c^3 \mathcal{V}/\mathbf{C}$ isomorphe à un produit, ayant pour fibre $\text{Hilb}_c^3 V$ en 1 et $\text{Hilb}_c^3 \hat{V}$ en 0. Ainsi $[\text{Hilb}_c^3 V]$ est rationnellement équivalent à $[\text{Hilb}_c^3 \hat{V}]$ dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^N$.

Soit K un cycle fixé de $A^{7-N}(\text{Al}^3 \mathbf{P}^N)$. On a

$$\deg K \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V] = \deg K \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 \hat{V}]$$

soit encore $T(V) = T(\hat{V})$. Regardons alors le diagramme commutatif où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions sont indiquées entre parenthèses :

$$\begin{array}{ccccc} (2N+1) & \text{Al}^3 \mathbf{P}^N & \xhookrightarrow{i} & \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^N & (3N) \\ & \uparrow j & & \uparrow u & \\ (11) & \text{Al}^3 \mathbf{P}^5 & \xhookrightarrow{\hat{i}} & \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^5 & (15) \end{array}$$

Bien entendu, schématiquement $\text{Al}^3 \mathbf{P}^N \cap \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^5 = \text{Al}^3 \mathbf{P}^5$, comme le prouve le lemme 14 de l'Annexe 7. D'après le théorème de Fulton-MacPherson (voir II.2.a), leur intersection en tant que cycle peut être choisie à support dans $\text{Al}^3 \mathbf{P}^5$.

Plus précisément, si $\alpha = [\text{Hilb}_c^3 \hat{V}]$, on a $i^* u_* \alpha = j_* C$ où

$$C = \beta \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 \hat{V}]$$

avec β dans $A^{N-5}(\text{Al}^3 \mathbf{P}^5)$. (Le $N-5$ étant la différence entre $3N+11$ et $2N+16$). Par suite, pour un cycle fixé K de $A^{7-N}(\text{Al}^3 \mathbf{P}^N)$, il vient par la formule des projections :

$$\begin{aligned} \deg K . i^* [\text{Hilb}_c^3 \hat{V}] &= \deg K . j_* C = \deg j^* K . C \\ &= \deg j^* K . \beta . i^* [\text{Hilb}_c^3 \hat{V}] . \end{aligned}$$

Mais comme $j^* K . \beta$ est un cycle fixé dans $A^2(Al^3 \mathbf{P}^5)$, ce degré représente une formule trisécante pour $\hat{V}$ dans $\mathbf{P}^5$, par définition même (voir I.1). D'après la proposition 11, il est donc de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)$$

puisque les invariants de $\hat{V}$ sont évidemment les mêmes que ceux de V . D'où la proposition 12.

2°) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^6$

a) Commençons par chercher pour une surface V de $\mathbf{P}^6$, le nombre de trisécantes à V rencontrant un $\mathbf{P}^4$ fixé. Ce nombre $T(V)$ est par définition le degré du 0-cycle $Axe^* \sigma_1 . i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$ où $i: Al^3 \mathbf{P}^6 \hookrightarrow \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^6$ est l'injection canonique et $\sigma_1 \in A^1(G(1, 6))$ est le cycle des droites coupant un $\mathbf{P}^4$ fixé de $\mathbf{P}^6$.

D'après la proposition 12, ce nombre est de la forme

$$T(V) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v) .$$

Soit $\tilde{V}$ la réunion de V et d'un plan P disjoint. On a (vu l'Annexe 5) les invariants de $\tilde{V}$:

$$\tilde{n} = n + 1, \quad \tilde{d} = n + d, \quad \tilde{t} = t + d, \quad \tilde{\delta} = \delta + n .$$

D'autre part, $\text{Hilb}_c^3 \tilde{V}$ est formé des quatre composantes disjointes $\text{Hilb}_c^3 V$, $\text{Hilb}^2 V \times P$, $V \times \text{Hilb}^2 P$ et $\text{Hilb}_c^3 P$. La contribution de la première et la dernière dans $T(\tilde{V})$ est respectivement $T(V)$ et $T(P) = a_1$ (puisque $n = 1$, $d = t = \delta = 0$ pour P). La troisième a une contribution nulle, puisqu'un triplet aligné ayant deux points dans P est dans P , donc ne peut couper V .

Reste à trouver la contribution à $T(\tilde{V})$ de la deuxième composante $\text{Hilb}^2 V \times P$. Il s'agit des sécantes à V coupant P et un $\mathbf{P}^4$. Par la formule de Pieri, on a dans $A^*(G(1, 6))$:

$$\sigma_1 . (2, 6) = (2, 5) + (1, 6) .$$

De sorte que, à équivalence rationnelle près, la contribution à $T(\tilde{V})$ de $\text{Hilb}^2 V \times P$ se décompose en

- les sécantes à V rencontrant une droite de $\mathbf{P}^6$,
- les sécantes à V dans un $\mathbf{P}^5$ fixé et y rencontrant un plan.

Dans le premier cas, leur nombre est δ puisqu'il s'agit du nombre de points-doubles d'une projection sur un $\mathbf{P}^4$ par une droite. Dans le deuxième cas, il s'agit du nombre de points-doubles de la courbe $V \cap \mathbf{P}^5$ projetée sur un $\mathbf{P}^2$ par un plan de $\mathbf{P}^5$. C'est donc d : le degré de la courbe double Γ de la surface V projetée sur un $\mathbf{P}^3$. Grâce à la généralité de P , les multiplicités sont bien 1. On a donc en conclusion:

$$T(\tilde{V}) = T(V) + \delta + d + a_1.$$

Comme d'habitude, on trouve par identification (lemme 12) de

$$\delta: u = 1,$$

$$d: \alpha + \beta = 1,$$

$$n: \begin{cases} -\gamma - v = a_2 - a_3 & (n = -1) \\ a_2 + 2\beta + \gamma + 2u + v = 0 & (n = 1) \end{cases}.$$

Il reste maintenant à trouver quatre autres équations. Si on désigne par $S(a, b, c, d)$ l'intersection complète de quatre hypersurfaces de degrés a, b, c, d dans $\mathbf{P}^6$, on voit que $S(2, 2, 1, 1)$, $S(2, 2, 2, 1)$ et $S(2, 2, 2, 2)$ n'ont pas de trisécante pour raison de degré. De plus, seule la première contient des droites, en nombre fini: 16. On a donc $T = 0$ pour ces trois surfaces puisqu'elles n'ont pas de trisécante rencontrant un $\mathbf{P}^4$ fixé.

De même, la surface de Veronese dans $\mathbf{P}^5$, plongée dans $\mathbf{P}^6$, n'a pas de trisécante car elle est intersection de quadriques dans $\mathbf{P}^5$ et elle ne contient pas de droite non plus. Pour elle aussi, $T = 0$. On obtient ainsi quatre nouvelles équations. Jointes aux précédentes, elles forment un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = -2 & a_2 = 0 & a_3 = 4 & \alpha = 4 \\ \beta = -3 & \gamma = 8 & u = 1 & v = -4. \end{cases}$$

On a donc démontré le

THÉORÈME 6. Soit V une surface de $\mathbf{P}^6$ d'invariants (n, d, t, δ) . Alors le degré du 0-cycle $\text{Axe}^* \sigma_1 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$ (nombre de trisécantes à V rencontrant un $\mathbf{P}^4$ fixé) est

$$4 \binom{n}{3} - 2n + 4t - d(3n - 8) + \delta(n - 4).$$

b) Cherchons maintenant, toujours pour une surface V de $\mathbf{P}^6$, le nombre de tangentes à V recoupant V . Cette fois, ce nombre $T(V)$ est le degré du 0-cycle $[\mathcal{D}] \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$ où $\mathcal{D}$ est l'hypersurface de $Al^3 \mathbf{P}^6$ formée des triplets non simples.

Toujours d'après la proposition 12, ce nombre est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v).$$

Soit $\tilde{V} = V \cup P$ où P est un plan disjoint de V , comme en a). La contribution de la composante $\text{Hilb}^2 V \times P$ de $\text{Hilb}_c^3 \tilde{V}$ dans $T(\tilde{V})$ est alors le nombre de tangentes à V coupant un plan fixe. C'est donc le nombre v de points de ramification dans une projection générique sur un $\mathbf{P}^3$ par un plan de $\mathbf{P}^6$, correspondant aux v points-pince de la surface projetée. Or on a (Annexe 6) $v = 2(d - \delta)$. D'où comme précédemment,

$$T(\tilde{V}) = T(V) + a_1 + 2(d - \delta).$$

Comme en a), par identification grâce au lemme 12, on obtient quatre équations.

Maintenant, des quatre surfaces vues précédemment: $S(2, 2, 1, 1)$, $S(2, 2, 2, 1)$, $S(2, 2, 2, 2)$ et Veronese, les trois dernières ne contiennent pas de droite et n'ont pas de trisécante. On a donc $T = 0$ pour ces trois surfaces, d'où trois nouvelles équations. Par contre, $S(2, 2, 1, 1)$ contient 16 droites de self-intersection -1 . Or on a montré ([26], 4.e) qu'une droite isolée dans V , de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$, contribue de $4 \binom{3+l}{2}$ dans le nombre $T(V)$.

Pour $S(2, 2, 1, 1)$, on a donc $T = 64$. D'où une dernière équation.

Le système de huit équations ainsi obtenu est inversible et on trouve

$$\begin{cases} a_1 = -24 & a_2 = 72 & a_3 = -48 & \alpha = -24 \\ \beta = 26 & \gamma = -144 & u = -2 & v = 24 \end{cases}.$$

On a donc montré le

THÉORÈME 7. Soit V une surface de $\mathbf{P}^6$ d'invariants (n, d, t, δ) . Alors le degré du 0-cycle $[\mathcal{D}] \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$ (nombre de tangentes à V recoupant V) est :

$$-4n(2n^2 - 15n + 19) - 24t + 2d(13n - 72) - 2\delta(n - 12).$$

De plus, si V contient un nombre fini de droites, la « contribution » d'une droite de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$ dans ce nombre est $4 \binom{3+l}{2}$.

3°) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^7$

Dans ce cas, il n'y a qu'une formule à chercher, car *en général il n'y a qu'un nombre fini de trisécantes* pour une surface V de $\mathbf{P}^7$. Nous nous intéressons donc au degré $T(V)$ du 0-cycle $i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$ où comme d'habitude $i: \text{Al}^3 \mathbf{P}^7 \hookrightarrow \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^7$ est l'injection canonique. D'après la proposition 12, ce degré est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v).$$

Comme dans le cas de $\mathbf{P}^6$ (paragraphe 2), soit $\tilde{V}$ la réunion de V et d'un plan P disjoint. Pour les mêmes raisons que précédemment, on a

$$T(\tilde{V}) = T(V) + a_1 + \delta.$$

En effet, δ est la contribution de la composante $\text{Hilb}^2 V \times P$ de $\text{Hilb}_c^3 \tilde{V}$ dans $T(\tilde{V})$: c'est le nombre de sécantes à V rencontrant un plan P , soit le nombre de points-doubles δ de la projection de V sur un $\mathbf{P}^4$. (Les multiplicités sont 1 car P est générique).

Il vient alors une identité entre n, d, t, δ puisqu'on connaît (lemme 13) les invariants de V . Grâce au lemme 12, par identification, on obtient quatre équations liant les coefficients $a_1, a_2 \dots v$. Il reste à trouver quatre autres équations. Soit $S(a, b, c, d, e)$ l'intersection complète de cinq hypersurfaces de degrés a, b, c, d, e dans $\mathbf{P}^7$. Aucune des quatre surfaces suivantes n'a de trisécante dans $\mathbf{P}^7$, pour raison de degré, et aucune ne contient de droite: $S(2, 2, 2, 1, 1)$, $S(2, 2, 2, 2, 1)$, $S(2, 2, 2, 2, 2)$ et la surface de Veronese (plongée dans $\mathbf{P}^7$). On a donc $T = 0$ pour ces quatre surfaces, d'où (puisqu'on connaît leurs invariants) quatre autres équations.

Jointes aux quatre équations précédentes, on obtient un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = 5 & a_2 = -18 & a_3 = 14 & \alpha = 8 \\ \beta = -8 & \gamma = 40 & u = 1 & v = -8 \end{cases}.$$

Par ailleurs, on a vu ([26], 4.f) qu'une droite isolée de V , de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$, contribue de $-\binom{4+l}{3}$ dans le nombre $T(V)$.

On a donc dénombré le

THÉORÈME 8. Soit V une surface de $\mathbf{P}^7$ d'invariants (n, d, t, δ) . Alors le degré du 0-cycle $i^* [\text{Hilb}_c^3 V]$ (nombre de trisécantes à V) est

$$5n - 18 \binom{n}{2} + 14 \binom{n}{3} + 8t - 8d(n-5) + \delta(n-8).$$

Si de plus V contient un nombre fini de droites, la « contribution » d'une telle droite de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$ à ce nombre est $-\binom{4+l}{3}$.

Remarque. On peut par exemple vérifier que la surface $S(2, 2, 2, 2, 3)$ de $\mathbf{P}^7$ possède 512 trisécantes, ce que donne un calcul direct dans la grassmannienne $G(1, 7)$.

VI) ANNEXE

Nous avons regroupé dans cette annexe tous les calculs auxiliaires qui auraient alourdi le cours du texte. Il s'agira la plupart du temps de calculs en coordonnées locales.

1°) $\text{Hilb}_c^k Q$

Ce paragraphe sert à étudier $\text{Hilb}_c^k S$ lorsque $S \subset \mathbf{P}^4$ est une surface dont les singularités sont *ordinaires*, i.e. localement réunion de deux branches lisses transverses. (Voir I.2.a.)

Soit Q dans $\mathbf{C}^4$ la réunion de deux plans P_1 et P_2 se coupant en l'origine.

LEMME 9. a) Tout k -uplet curviligne ξ_0 de support $\{0\}$ contenu dans Q est limite dans $(\text{Hilb}_c^k Q)_{\text{red}}$ de k -uplets formés de points distincts. En particulier $\text{Hilb}_c^k Q$ est génériquement réduit car $\text{Hilb}_\#^k Q$ est dense (et réduit).

b) $\text{Hilb}_c^k Q$ est en fait réduit.

Preuve. Soit (x, y, z, u) un système de coordonnées pour lequel P_1 est donné par $x = y = 0$ et P_2 par $z = u = 0$. De sorte que l'idéal de Q est

$$J = (x, y) \cap (z, u) = (xz, yz, xu, yu).$$

Montrons a). Soit ξ_0 dans Q un k -uplet curviligne avec $\text{Supp } \xi_0 = \{0\}$. Mais ξ_0 est contenu dans une courbe non-singulière Γ . Celle-ci est « transverse » soit à P_1 soit à P_2 ; supposons Γ transverse à P_1 ; quitte à faire une transformation linéaire sur x et y , Γ peut être paramétrée par

$$y = \alpha(x), \quad z = \beta(x), \quad u = \gamma(x),$$

où α, β, γ sont dans l'idéal maximal de $\mathbf{C}[[x]]$. L'idéal de ξ_0 dans $\mathbf{C}[[x, y, z, u]]$ est donc

$$I_0 = (x^k, y - \alpha(x), z - \beta(x), u - \gamma(x)).$$

Comme on a l'inclusion $\xi_0 \subset Q$, soit encore $I_0 \supset J$, il vient $x\beta(x)$ et $x\gamma(x)$ multiples de x^k . En supprimant par ailleurs les termes de degré supérieur à k , l'idéal se réécrit :