

§1. Preliminary remarks

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 1. PRELIMINARY REMARKS

Note that if R is a finite dimensional K -algebra and B is a filtered multiplicative basis (as defined above), then $B \cap \{\text{rad}(R)\}^n$ is a K -basis of $\{\text{rad}(R)\}^n$ for all $n \geq 1$. Indeed, the set $B \cap \{\text{rad}(R)\}^n$ is linearly free over K since B is. By hypothesis, $B \cap \text{rad}(R)$ is a K -basis of $\text{rad}(R)$ and thus the set of products $b_1 \cdot \dots \cdot b_n$ with $b_i \in B \cap \text{rad}(R)$ is a generator system for $\{\text{rad}(R)\}^n$. But all such products $b_1 \cdot \dots \cdot b_n$ are either 0 or belong to $B \cap \{\text{rad}(R)\}^n$. Hence, $B \cap \{\text{rad}(R)\}^n$ generates $\{\text{rad}(R)\}^n$ over K .

The case of a finite abelian group G is easy to understand:

Let

$$G_p = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_r \rangle$$

be a decomposition of the p -Sylow subgroup G_p of G as a direct product of cyclic groups of orders $p^{n_1}, \dots, p^{n_r}$ respectively. Let $G = G_p \times H$, where $|H|$ is prime to p . Then,

$$B = \{(a_1 - 1)^{m_1} \cdot (a_2 - 1)^{m_2} \dots (a_r - 1)^{m_r} \cdot h \mid 0 \leq m_i \leq n_i - 1, h \in H\}$$

is a filtered multiplicative basis of KG for any field K of characteristic p .

If we insist that the elements of B outside $\text{rad}(R)$ should be orthogonal idempotents, then we have to require that K be algebraically closed, as otherwise KH itself need not have a filtered multiplicative basis B satisfying

MB3) If $e, e' \in B \setminus \text{rad}(R)$, $e \neq e'$, then $e^2 = e$ and $e \cdot e' = 0$.

Observe that, more generally, if B_1, B_2 are filtered multiplicative bases for KG_1 and KG_2 , then $B_1 \times B_2$ is a filtered multiplicative basis for $K[G_1 \times G_2]$.

In the next paragraphs we will examine examples of p -groups.

If G is a p -group, and K a field of characteristic p , then $\text{rad}(KG)$ is the augmentation ideal

$$\text{rad}(KG) = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \mid \sum_{g \in G} \alpha_g = 0 \right\}$$

Note also that in that case, a filtered multiplicative basis B for KG necessarily contains 1. Indeed, $\dim_K \{KG / \text{rad}(KG)\} = 1$. If $e \in B$ is the unique element outside $\text{rad}(KG)$, then $e^2 \notin \text{rad}(KG)$ and therefore $e^2 = e$. But KG is local, thus $e = 1$. (Alternatively, $e = 1 + r$ with $r \in \text{rad}(KG)$ and $e = e^{p^N} = 1 + r^{p^N} = 1$.)

Thus for p -groups, axiom MB3) is automatically satisfied.