EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE POLARE ZERLEGUNG EINER REGULÄREN MATRIX UND DIE GEOMETRIE DER ORTHOGONALEN GRUPPE

Autor(en): **Rummler, Hansklaus**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-55087

L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 211-218

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE POLARE ZERLEGUNG EINER REGULÄREN MATRIX UND DIE GEOMETRIE DER ORTHOGONALEN GRUPPE

von Hansklaus RUMMLER

§ 0. EINFÜHRUNG

Bekanntlich lässt sich jede reguläre $n \times n$-Matrix A mit reellen Koeffizienten eindeutig als Produkt $A = US$ schreiben, wobei U orthogonal und S positiv definit symmetrisch ist (vgl. [3]). Diese sogenannte polare Zerlegung hat eine ebenso einfache wie interessante geometrische Deutung: U ist die beste orthogonale Approximation von A, wenn man den Raum $\mathbf{R}^{n \times n}$ aller reellen $n \times n$-Matrizen mit der üblichen euklidischen Struktur versieht. Man kann das auch so ausdrücken: Fasst man die Spalten der Matrix $A = (a_1, ..., a_n)$ als Basis des $\mathbf{R}^n$ auf, so ist $U = (u_1, ..., u_n)$ diejenige eindeutig bestimmte Orthonormalbasis, für die $\sum_{j=1}^{n} \| a_j - u_j \|^2$ minimal ist.

Darüber hinaus zeigt sich, dass für festes $A \in GL(n, \mathbf{R})$ die Funktion $f_A : O(n) \to \mathbf{R}$, $f_A(U) := \| A - U \|^2$ Aufschlüsse über die Geometrie von $O(n)$ gibt: Es ist fast immer eine perfekte Morse-Funktion.

Eine Übertragung der Resultate auf komplexe Matrizen bereitet keine Schwierigkeiten, aber der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den reellen Fall; aus dem gleichen Grunde verzichten wir auch darauf, singuläre Matrizen zu betrachten.

§ 1. DIE BESTE ORTHOGONALE APPROXIMATION EINER REGULÄREN MATRIX

Mit $\mathbf{R}^{n \times n}$ bezeichnen wir den reellen Vektorraum aller reellen $n \times n$-Matrizen. $\mathbf{1}$ ist die Einheitsmatrix, und A^* die Transponierte der Matrix A. Wir versehen $\mathbf{R}^{n \times n}$ mit dem Standard-Skalarprodukt

$$<A, B> := \operatorname{tr}(A^*B) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ij} .$$

Folgende Eigenschaften dieses Skalarproduktes sind nahezu trivial:

(1) Ist U orthogonal, so sind Links- und Rechts-Multiplikation mit U Isometrien.

(2) Das Transponieren ist eine Isometrie.

(3) $\mathbf{R}^{n \times n}$ ist die orthogonale direkte Summe der beiden Unterräume der symmetrischen bzw. antisymmetrischen Matrizen:

$$\mathbf{R}^{n \times n} = \mathbf{R}^{n \times n}_{\mathrm{sym}} \oplus \mathbf{R}^{n \times n}_{\mathrm{asym}} .$$

Sei jetzt $A \in GL(n, \mathbf{R})$ eine feste reguläre $n \times n$-Matrix. Wir suchen eine orthogonale Matrix $U \in O(n)$, für die der Abstand $\| A - U \|$ minimal ist. Bezeichnet $T_U O(n)$ den Tangentialraum an $O(n)$ in U,

$$T_U O(n) = \{UB ; B \in \mathbf{R}^{n \times n}_{\mathrm{asym}}\} ,$$

so gilt: $\| A - U \|$ minimal $\Rightarrow A - U \perp T_U O(n)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \langle A - U, UB\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad B \in \mathbf{R}^{n \times n}_{\mathrm{asym}} \\
&\Leftrightarrow \langle U^*A - \mathbf{1}, B\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad B \in \mathbf{R}^{n \times n}_{\mathrm{asym}} \\
&\Leftrightarrow U^*A - \mathbf{1} \in \mathbf{R}^{n \times n}_{\mathrm{sym}} \\
&\Leftrightarrow U^*A \in \mathbf{R}^{n \times n}_{\mathrm{sym}} \\
&\Leftrightarrow A = US \text{ mit } S \in \mathbf{R}^{n \times n}_{\mathrm{sym}} .
\end{aligned}$$

Dabei gilt offensichtlich noch $S^2 = A^*A$. Ist umgekehrt S symmetrisch und gilt $S^2 = A^*A$, so ist $U = AS^{-1}$ orthogonal.

Damit haben wir eine notwendige Bedingung für die Minimalität des Abstandes $\| A - U \|$: Es muss $A = US$ sein mit einer symmetrischen Matrix S, die die Gleichung $S^2 = A^*A$ erfüllt.

Als nächstes bestimmen wir alle diese Matrizen S: Da A regulär ist, ist die symmetrische Matrix A^*A positiv definit, und wir können ihre verschiedenen Eigenwerte in der Form $\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2$ schreiben mit $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$. $\mu_1, \dots, \mu_r$ seien die entsprechenden Multiplizitäten, und für $i = 1, \dots, r$ sei

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{\mu_i \times \mu_i} .$$

Dann können wir A^*A in der Form

$$A^*A = C \begin{pmatrix} \Lambda_1^2 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & \cdot & \Lambda_r^2 \end{pmatrix} C^*$$

schreiben, wo C eine orthogonale Matrix ist, deren Spalten Eigenvektoren von A^*A sind. Folglich ist

$$S = C \begin{pmatrix} S_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & \cdot & S_r \end{pmatrix} C^*$$

mit $S_i^2 = \Lambda_i^2$, d.h. $S_i = \lambda_i U_i$, wobei U_i orthogonal und symmetrisch ist. Für $A = US$ ist in diesem Falle

$$\begin{aligned} \| A - U \|^2 &= \| A \|^2 - 2\langle A, U\rangle + \| U \|^2 \\ &= \| A \|^2 - 2\mathrm{tr}(A^*U) + n \\ &= \| A \|^2 + n - 2\mathrm{tr} S \\ &= \| A \|^2 + n - 2 \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{tr} U_i . \end{aligned}$$

Nun ist aber $\mathrm{tr} U_i \leqslant \mu_i$, wobei Gleichheit genau für $U_i = \mathbf{1}$ gilt. Damit ist $\| A - U \|^2 \geqslant \| A \|^2 + n - 2 \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i$, und der kleinste Wert wird genau für $U_1 = \mathbf{1}, \ldots, U_r = \mathbf{1}$ erreicht, d.h. für

$$S = C \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \Lambda_r \end{pmatrix} C^* ,$$

die einzige positiv definite symmetrische Lösung der Gleichung $S^2 = A^*A$. Damit haben wir gezeigt:

SATZ 1. *Zu* $A \in GL(n, \mathbf{R})$ *gibt es genau eine orthogonale Matrix* $U \in O(n)$, *für die der Abstand* $\| A - U \|$ *minimal ist. Sie ist eindeutig bestimmt durch die polare Zerlegung* $A = US$ *mit* U *orthogonal und* S *positiv definit symmetrisch.*

Wie wir bereits in der Einführung bemerkt haben, kann man U als diejenige Orthonormalbasis von $\mathbf{R}^n$ interpretieren, die A am nächsten liegt.

Im Gegensatz zu der durch das Gram-Schmidt-Verfahren konstruierten hängt sie nicht von der Ordnung der Basis A ab; genauer gilt:

SATZ 2. *A und U seien wie in Satz 1, P eine Permutationsmatrix. Dann ist $\tilde{U} = UP$ die beste orthogonale Approximation von $\tilde{A} = AP$.*

Beweis. $\| \tilde{A} - \tilde{U} \| = \| AP - UP \| = \| A - U \|$, da P ja als Permutationsmatrix orthogonal ist. Gäbe es ein $\tilde{\tilde{U}} \in O(n)$ mit $\| \tilde{A} - \tilde{\tilde{U}} \| < \| A - U \|$, so wäre $\tilde{\tilde{U}}P^*$ eine bessere Approximation von A als U.

Ebenso einfach sind die Beweise der folgenden Eigenschaften dieser besten orthogonalen Approximation:

SATZ 3.

(1) *Die beste orthogonale Approximation einer positiv definiten symmetrischen Matrix ist die Einheitsmatrix.*

(2) *Ist U die beste orthogonale Approximation von A, so ist U^* diejenige von A^*.*

§ 2. DIE ABSTANDSFUNKTION $f_A(U) := \| A - U \|^2$

Sei $A \in GL(n, \mathbf{R})$ fest. Um das Minimum der Abstandsfunktion $f_A: O(n) \to \mathbf{R}$, $f_A(U) := \| A - U \|^2$ zu bestimmen, haben wir oben alle kritischen Punkte dieser Funktion bestimmt: Es sind genau diejenigen Matrizen $U \in O(n)$, für die $A = US$ ist mit symmetrischem S, so dass $S^2 = A^*A$ ist. Diese Gleichung hat genau dann endlich viele — und zwar 2^n — symmetrische Lösungen S, wenn A^*A n verschiedene Eigenwerte $0 < \lambda_1^2 < \dots < \lambda_n^2$ hat: Es sind die Matrizen

$$S = C \begin{pmatrix} \pm\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm\lambda_m \end{pmatrix} C^*,$$

wenn $A^*A = C \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} C^*$ ist, wobei die Spalten der orthogonalen Matrix C die entsprechenden Eigenvektoren von A^*A sind. Zur Vereinfachung verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$$[\lambda]:=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n,$$

$$[\varepsilon]:=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n\end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varepsilon_i=\pm 1,\ i=1,\ldots,n,$$

$S=S_\varepsilon=C[\varepsilon]\,[\lambda]C^*$ und $U=U_\varepsilon=AS^{-1}$. Dann gilt:

SATZ 4. *Hat A^*A n verschiedene Eigenwerte, so ist f_A eine Morse-Funktion auf $O(n)$, und zwar hat der kritische Punkt U_ε den Index $(i_1-1)+\ldots+(i_k-1)$, wenn $\varepsilon_{i_1}=\ldots=\varepsilon_{i_k}=-1$ ist und die restlichen $\varepsilon_i=+1$.*

Beweis. Zur Untersuchung der Funktion f_A dürfen wir wegen Eigenschaft (1) des Skalarproduktes auf $\mathbf{R}^{n\times n}$ und wegen Satz 1 o.B.d.A. annehmen, dass $A=S$ positiv definit symmetrisch ist und ausserdem bereits in Diagonalform vorliegt, also $A=[\lambda]$ mit den oben eingeführten Bezeichnungen. Die kritischen Punkte von f_A sind dann gerade die Matrizen $U_\varepsilon=[\varepsilon]$, wobei f_A in $\mathbf{1}$ das Minimum annimmt. Ferner ist $S_\varepsilon=[\varepsilon]\,[\lambda]$.

Um f_A in der Nähe des kritischen Punktes U_ε zu untersuchen, beschränken wir die Funktion auf die Kurven $(U_\varepsilon\exp(tB))_{t\in\mathbf{R}}$, $B\in\mathbf{R}^{n\times n}_{\text{asym}}$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\|A-U_\varepsilon\exp(tB)\|^2=\|A-[\varepsilon]\|^2-t^2\operatorname{tr}(S_\varepsilon B^2)+o(t^2),$$

so dass wir also die quadratische Form $Q\colon R^{n\times n}_{\text{asym}}\to\mathbf{R}$,

$$Q(B)=-\operatorname{tr}(S_\varepsilon B^2)=\operatorname{tr}(B^*S_\varepsilon B)$$

bzw. die zugehörige symmetrische Bilinearform untersuchen müssen. Dazu führen wir in $\mathbf{R}^{n\times n}_{\text{asym}}$ eine geeignete Basis ein:

$$B_{ij}:=E_{ij}-E_{ji},\ 1\leqslant i<j\leqslant n,$$

wobei E_{ij} diejenige Matrix ist, die genau eine Eins in der i-ten Zeile an der j-ten Stelle hat und sonst lauter Nullen. Dann ist $\langle B_{ij},B_{kl}\rangle=2\delta_{ik}\delta_{jl}$, d.h. $(B_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ ist eine Orthogonalbasis von $\mathbf{R}^{n\times n}_{\text{asym}}$. Diese Basis diagonalisiert die Form Q:

$$\begin{aligned} Q(B_{ij}, B_{kl}) &= -\mathrm{tr}(S_\varepsilon B_{ij} B_{kl}) = -\mathrm{tr}([\varepsilon]\,[\lambda] B_{ij} B_{kl}) \\ &= \delta_{ik}\delta_{jl}(\varepsilon_i\lambda_i + \varepsilon_j\lambda_j) - \delta_{il}\delta_{jk}(\varepsilon_i\lambda_i + \varepsilon_j\lambda_j) \\ &= \delta_{ik}\delta_{jl}(\varepsilon_i\lambda_i + \varepsilon_j\lambda_j)\,, \end{aligned}$$

da wegen $i < j$ und $k < l$ stets $\delta_{il}\delta_{jk} = 0$ ist.

Insbesondere ist also $Q(B_{ij}, B_{kl}) = 0$ für $(i, j) \neq (k, l)$, und $Q(B_{ij}, B_{ij}) = \varepsilon_i\lambda_i + \varepsilon_j\lambda_j \neq 0$ wegen unserer Voraussetzung $\lambda_i \neq \lambda_j$. Dabei ist $Q(B_{ij}, B_{ij}) < 0$ genau dann, wenn $\varepsilon_j = -1$ ist, da wir ja die Werte λ_i so numeriert haben, dass $0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n$ ist. Daraus ergibt sich sofort die angegebene Formel für den Index.

Als nächstes wollen wir untersuchen, welche Indizes bei den kritischen Punkten der Funktion f_A auftreten. Wir nehmen dazu natürlich wieder an, dass A^*A n verschiedene Eigenwerte hat und beschränken uns ausserdem auf den Fall $\det A > 0$ und die Untersuchung von $f_A|_{SO(n)}$. Dort hat f_A dann die 2^{n-1} kritischen Punkte U_ε für $\varepsilon = (\pm 1, ..., \pm 1)$ mit $\varepsilon_1 \cdot ... \cdot \varepsilon_n = +1$. Zur Kennzeichnung dieser Punkte verwenden wir die Potenzmenge $P\{1, ..., n-1\}$, indem wir für $\alpha \subset \{1, ..., n-1\}$ $U_\alpha := U_{\varepsilon(\alpha)}$ setzen, wobei $\varepsilon(\alpha) := (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ sei

mit $\varepsilon_1 := (-1)^{\mathrm{card}(\alpha)}$

$$\text{und } \varepsilon_i := \begin{cases} -1\,, & \text{falls } i-1 \in \alpha \\ +1\,, & \text{falls } i-1 \notin \alpha \end{cases} \qquad \text{für } i = 2, ..., n\,.$$

Bezeichnet $\nu(\alpha)$ den Index von f_A im kritischen Punkt U_α, so ist nach Satz 4 gerade $\nu(\alpha) = \sum_{i \in \alpha} i$. Insbesondere treten also alle Werte von $0 = \nu(\emptyset)$ bis $\dfrac{n(n-1)}{2} = \nu(\{1, ..., n-1\})$ auf, und zwar mit der Häufigkeit $\mu(\nu)$, die durch die erzeugende Funktion

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu(\nu) x^\nu = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + x^i)$$

beschrieben wird (vgl. [4]). $P(x)$ ist aber auch das Poincaré-Polynom von $SO(n)$ über $\mathbf{Z}/2$ (vgl. [2]). Damit haben wir das folgende Ergebnis:

Satz 5. *Hat $A \in GL(n, \mathbf{R})$ positive Determinante und hat A^*A n verschiedene Eigenwerte, so ist die Morse-Funktion $f_A: SO(n) \to \mathbf{R}$ perfekt.* (Vgl. [1].)

Insbesondere gibt es also auf $SO(n)$ keine Morse-Funktion mit weniger kritischen Punkten.

§ 3. Die Geodätischen $U_\varepsilon \exp(tB_{ij})$

Zum Abschluss wollen wir noch die weiter oben betrachteten Kurven $(U_\varepsilon \exp(tB_{ij}))_{t\in\mathbf{R}}$ etwas näher untersuchen. Man rechnet leicht $B_{ij}^3 = -B_{ij}$ und $B_{ij}^4 = -B_{ij}^2$ aus, und daraus ergibt sich

$$\exp(tB_{ij}) = \mathbf{1} + B_{ij}^2 - \cos t\, B_{ij}^2 + \sin t\, B_{ij}\,.$$

Es handelt sich also um einen Kreis vom Radius $\sqrt{2}$ mit dem Mittelpunkt

$$M_{ij} = \mathbf{1} + B_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

wo auf der Diagonalen lauter Einsen und genau zwei Nullen stehen. Insbesondere ist also

$$\exp(\pi B_{ij}) = \mathbf{1} + 2B_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

und daraus ergibt sich $A = U_\varepsilon S_\varepsilon = U_\varepsilon \exp(\pi B_{ij}) \exp(\pi B_{ij}) S_\varepsilon$ mit $\exp(\pi B_{ij}) S_\varepsilon = S_{\varepsilon'}$, wobei $\varepsilon'_k = \begin{cases} \varepsilon_k\,, & \text{falls } k \neq i,j \\ -\varepsilon_k\,, & \text{falls } k = i,j \end{cases}$ ist.

Folglich ist auch $U_\varepsilon \exp(\pi B_{ij}) = U_{\varepsilon'}$.

$U_\varepsilon \exp(tB_{ij})$ ist minimal, d.h. es gibt keine kürzere Verbindung zwischen U_ε und $U_{\varepsilon'}$ in $O(n)$: Um das zu zeigen, genügt es offenbar, $\exp(tB_{ij})$ in

$SO(n)$ zu untersuchen und zu zeigen, dass diese Kurve die kürzeste Verbindung zwischen $\mathbf{1}$ und $\mathbf{1} + 2B_{ij}$ darstellt. Sei dazu V eine beste orthogonale Approximation von M_{ij}. (V ist nicht eindeutig, da M_{ij} nicht regulär ist.) Dann besitzt M_{ij} die polare Zerlegung $M_{ij} = VT$, wobei T symmetrisch ist und $T^2 = M_{ij}^* M_{ij} = M_{ij}$ gilt, also

$$\begin{aligned} \| M_{ij} - V \|^2 &= \| T - \mathbf{1} \|^2 = \| T \|^2 - 2\operatorname{tr} T + \| \mathbf{1} \|^2 \\ &= \| M_{ij} \|^2 - 2\operatorname{tr} T + \| \mathbf{1} \|^2 = n - 2 - 2\operatorname{tr} T + n \\ &= 2n - 2 - 2\operatorname{tr} T . \end{aligned}$$

Numerieren wir die Standardbasis des $\mathbf{R}^n$ in geeigneter Weise um, so ist

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ also } T = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $T_1 \in O(n-2)$ symmetrisch, und damit $\operatorname{tr} T \leqslant n-2$, wobei Gleichheit genau für $T_1 = \mathbf{1}$ gilt. Folglich ist $\| M_{ij} - V \|^2 \geqslant 2n - 2 - 2n + 4 = 2$, und jeder Weg in $SO(n)$ zwischen $\mathbf{1}$ und $\mathbf{1} + 2B_{ij}^2$ verläuft ausserhalb der offenen Kugel vom Radius $\sqrt{2}$ um M_{ij} in $\mathbf{R}^{n \times n}$ und ist damit mindestens so lang wie der Kreisbogen $(\exp(tB_{ij}))_{0 \leqslant t \leqslant \pi}$.

LITERATUR

[1] Bott, R. Lectures on Morse Theory, old and new. *Bull. Amer. Math. Soc. 7* (1982), 331-358.

[2] Ehresmann, C. Sur la topologie des groupes simples clos. *C. R. Acad. Sci. Paris 208* (1939), 1263-1265.

[3] Halmos, P. R. *Finite-dimensional Vector Spaces*, 2nd ed., Princeton, N. J.: Van Nostrand (1958).

[4] Jeger, M. *Einführung in die Kombinatorik*, Bd. 2, Stuttgart: Klett (1976).

(Reçu le 5 août 1985)

Hansklaus Rummler

Institut de Mathématiques
de l'Université de Fribourg
CH-1700 Fribourg