5. Un développement et quelques exemples classiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

THÉORÈME 11. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un pseudogroupe de transformations d'un ensemble non vide* X, *relatif à l'algèbre* $\mathfrak{P}(X)$ *de toutes les parties de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *n'est pas moyennable.*

ii) *Il existe un entier* $n \geqslant 2$ *et des parties* $S_1, \ldots, S_{n-1}, S_n, T_1, \ldots, T_{n-1}$ *de* X *avec*
— *les* S_j *sont équivalents deux à deux,*
— S_n *est grand,*
— T_k *est équivalent à une partie de* $S_k (k=1, \ldots, n-1)$,
— $\left(\coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j\right) \subset \left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k\right)$.

iii) $\mathfrak{G}$ *est (fortement) paradoxal: il existe une partition* $X = X_1 \coprod X_2$ *avec* $X_j \equiv X (\mathrm{mod}\ \mathfrak{G})$.

De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors deux grandes parties quelconques de X *sont équivalentes modulo* $\mathfrak{G}$.

On connaît d'autres conditions équivalentes: voir par exemple [R1] pour des conditions à la Følner. Voir aussi le corollaire 3.5 de [R2]: toute action d'un groupe de génération finie et de croissance sous-exponentielle est moyennable.

5. UN DÉVELOPPEMENT ET QUELQUES EXEMPLES CLASSIQUES

Soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations d'un espace $(X, \mathfrak{B})$ donné avec un sous-ensemble non vide $U \in \mathfrak{B}$. (Le cas étudié plus haut correspond à $U = X$.) Rappelons que nous notons $\mathfrak{G}_U$ le pseudogroupe de transformations de $(U, \mathfrak{B}_U)$ défini par $\mathfrak{G}$. On appelle *moyenne invariante* pour le système $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$ une fonction $\mu : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ telle que

$$\mu(U) = 1 ,$$
$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour} \quad S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset ,$$
$$\mu(T) = \mu(S) \quad \text{s'il existe} \quad \gamma : S \to T \text{ dans } \mathfrak{G} .$$

La notion est due à von Neumann [vN].

PROPOSITION 12. *On reprend les notations ci-dessus. Pour qu'il existe une moyenne invariante pour* $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{G}_U$ *soit moyennable.*

Preuve. Supposons qu'il existe une moyenne $\mu: \mathfrak{B}_U \to [0, 1]$ invariante par $\mathfrak{G}_U$. Soit $S \in \mathfrak{B}$; s'il existe une $\mathfrak{B}$-partition $S = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j$, des sous-ensembles $U_1, \ldots, U_n$ de U et des éléments $\gamma_j: S_j \to U_j$ dans $\mathfrak{G}$ pour $j = 1, \ldots, n$, on pose $\mu_X(S) = \sum_{j=1}^{n} \mu(U_j)$; dans le cas contraire, on pose $\mu_X(S) = \infty$. On vérifie que $\mu_X: \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ est une moyenne invariante pour $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$.

L'implication réciproque est (encore plus) banale. □

Avec les notations de la preuve, on peut remarquer que $\mu_X(X) < \infty$ si et seulement si la partie U est grande dans X.

Terminons en décrivant quelques exemples bien connus d'espaces paradoxaux.

Exemple 1 : groupes libres agissant librement

On considère le groupe libre non abélien $\mathbf{F}_2$ à deux générateurs a et b, qui agit sur lui-même par multiplication à gauche. Grâce à la proposition 3, on s'assure que l'espace obtenu est paradoxal (au sens faible) en considérant le sous-ensemble S de $\mathbf{F}_2$, constitué par les mots réduits de la forme $a^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, w quelconque: en effet S, bS, $b^2 S$ sont disjoints deux à deux, et $S \cup aS = \mathbf{F}_2$.

On peut vérifier la paradoxalité forte sans l'aide de la proposition 4. Notons X_1 le sous-ensemble de $\mathbf{F}_2$ contenant les puissances a^n de a (où $n \in \mathbf{Z}$) et les mots réduits de la forme $a^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $w \neq \emptyset$. Le complémentaire X_2 de X_1 consiste en les mots réduits de la forme $b^n w$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, w quelconque. On peut définir (presque comme dans [C]) deux bijections $\varphi_j: \mathbf{F}_2 \to X_j (j=1, 2)$

$$\varphi_1(g) = \begin{cases} g & \text{si } g = a^n \text{ avec } n \in \mathbf{Z} \\ & \text{ou } g = a^n w \text{ avec } n > 0, \\ a^{-1} g & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\varphi_2(g) = \begin{cases} g & \text{si } g = b^n w \text{ avec } n > 0, \\ b^{-1} g & \text{sinon}, \end{cases}$$

qui montrent que le $\mathbf{F}_2$-espace $\mathbf{F}_2$ est fortement paradoxal.

Il en résulte que le groupe $\mathbf{F}_2$ n'est pas moyennable.

Plus généralement, tout ensemble X sur lequel $\mathbf{F}_2$ agit librement est paradoxal (voir [vN], page 82). En effet, on peut choisir un domaine fondamental $T \subset X$ pour l'action, de sorte que X et $\mathbf{F}_2 \times T$ sont isomorphes en tant que $\mathbf{F}_2$-espaces (avec $\mathbf{F}_2$ agissant par multiplications à gauche sur le premier facteur de $\mathbf{F}_2 \times T$, et trivialement sur le second). Par suite, à tout paradoxe dans $\mathbf{F}_2$ constitué de bijections $\gamma_j \colon \mathbf{F}_2 \to T_j (j=1, 2)$, on peut associer un paradoxe dans $\mathbf{F}_2 \times T$ constitué des bijections $\gamma_j \times \mathrm{id}_T (j=1, 2)$.

Comme exemples d'actions libres de $\mathbf{F}_2$, citons:

1) La multiplication à gauche dans un sur-groupe de $\mathbf{F}_2$.
2) Les actions de $\mathbf{F}_2$ sur les sphères $\mathbf{S}^{2n+1} (n \geqslant 1)$ construites par Deligne et Sullivan [DS].

Exemple 2: groupes libres agissant avec isotropies abéliennes

Considérons d'abord l'action de $\mathbf{F}_2$ sur $\mathbf{F}_2 - \{1\}$ par automorphismes intérieurs. L'espace obtenu est paradoxal: en effet, si S est l'ensemble des mots réduits non vides de la forme $a^k w a^l$ avec $k, l \in \mathbf{Z}$ et $k, l \neq 0$, alors

1) $S \cup aSa^{-1} \cup a^{-1}Sa = \mathbf{F}_2 - \{1\}$,
2) $b^j S b^{-j} \cap b^k S b^{-k} = \emptyset$, $\quad j, k \in \mathbf{Z}$, $\quad j \neq k$.

Notons qu'on a de plus $S^{-1} = S$. Vu 1) et 2), il n'existe pas de moyenne invariante sur $\mathbf{F}_2 - \{1\}$: on dit que $\mathbf{F}_2$ n'est pas *intérieurement moyennable.*

Plus généralement, tout ensemble Z, sur lequel $\mathbf{F}_2$ agit de telle sorte que les groupes d'isotropie sont abéliens, est paradoxal. Notons $I(z)$ le groupe d'isotropie d'un point $z \in Z$ pour une telle action, et posons

$$X = \{z \in Z \mid I(z) = \{1\}\}, \qquad Y = Z - X.$$

Vu l'exemple 1, il suffit de vérifier que le $\mathbf{F}_2$-espace Y est paradoxal. Pour tout $y \in Y$, le groupe $I(y)$ est infini cyclique; on en choisit un générateur $c(y)$.

Notons que

$$c(gy) \in \{gc(y)g^{-1}, gc(y)^{-1}g^{-1}\}$$

pour tout $g \in \mathbf{F}_2$ et pour tout $y \in Y$. Posons

$$U = \{y \in Y \mid c(y) \in S\}.$$

Les parties $aU, U, a^{-1}U$ recouvrent Y par 1) et les parties $b^j U$ sont disjointes deux à deux ($j \in \mathbf{Z}$) par 2). Donc Y est paradoxal par une application immédiate de la proposition 3.

Mentionnons avant l'exemple 3 deux autres exemples d'actions de $\mathbf{F}_2$ à isotropies abéliennes

1) Le sous-groupe de $SL(2, \mathbf{Z})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est isomorphe à $\mathbf{F}_2$ (exemple 1 de [He]), donc $\mathbf{F}_2$ agit naturellement sur $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ moins l'origine. Cette action est paradoxale.

2) Soient G un groupe et H un sous-groupe libre non abélien de G. On suppose que le centralisateur $I_g = \{h \in H \mid gh = hg\}$ est abélien pour tout $g \in G$ avec $g \neq 1$. Alors l'action de H sur $G - \{1\}$ par automorphismes intérieurs est paradoxale.

Nous avons retrouvé ainsi la proposition 4 et l'exemple 5 de [Ak]: le groupe G de 2) n'est pas intérieurement moyennable, et en particulier le produit semi-direct de $\mathbf{F}_2$ par $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ défini par l'action de 1) n'est pas intérieurement moyennable.

Exemple 3: déplacements euclidiens d'un domaine du système solaire

On se donne un ouvert borné E de l'univers, contenant la lune et une pomme.

Soit B une boule de E de centre b. Dans l'action sur $B - \{b\}$ du groupe des rotations $SO(3)$, tous les groupes d'isotropie sont abéliens. Or $SO(3)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{F}_2$ (voir [Hf], ou [He]). Donc $B - \{b\}$ est paradoxal pour $SO(3)$.

Si $\mathfrak{G}$ désigne le pseudogroupe des déplacements euclidiens de E, toute partie $X \subset E$ d'intérieur non vide contient une grande partie $B - \{b\}$. Deux parties de E d'intérieurs non vides sont donc $\mathfrak{G}$-équivalentes par le corollaire 7: c'est le théorème III de l'introduction. Observons que, des sections précédentes, nous n'avons utilisé que la proposition. 3, le lemme 5 et le corollaire 7, qui sont indépendants du reste.

La même situation prévaut sur une sphère: la surface de mon jardin est équivalente à celle de Rome modulo le (pseudo)groupe des rotations, contrairement à l'opinion qui apparaît à la page 18 de [GU]. En revanche, le pseudogroupe des déplacements d'un ouvert borné du plan euclidien est moyennable. Nous ignorons s'il a jamais été fait usage d'un argument basé sur ces faits dans la controverse sur la rotondité de la terre.

Remarque. Dans les exemples qui précèdent, l'existence de paradoxes est liée à la présence de groupes libres non abéliens.

Considérons plus particulièrement un groupe G, agissant sur lui-même par multiplication à gauche. La question suivante apparaît implicitement dans [vN] et explicitement dans [K2]: l'existence d'un sous-groupe de G isomorphe à $\mathbf{F}_2$ est-elle équivalente à l'existence d'une décomposition paradoxale du G-espace G (i.e. à la non moyennabilité de G)?

La réponse semble être non: il existe des groupes paradoxaux (i.e. non moyennables) sans sous-groupe libre. C'est par exemple le cas des groupes de Burnside $B(2, p)$ pour p impair et p assez grand, où $B(2, p)$ est le quotient du groupe libre $\mathbf{F}_2$ par les relations $(w^p = 1)_{w \in \mathbf{F}_2}$: voir [O] et [Ad].

RÉFÉRENCES

[Ad] ADYAN, S. I. Random walks on free periodic groups. *Math. USSR Izvestiya 21 (3)* (1983), 425-434.

[Ak] AKEMANN, C. A. Operator algebras associated with Fuchsian groups. *Houston J. Math. 7* (1981), 295-301.

[BT] BANACH, S. et A. TARSKI. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fund. Math. 6* (1924), 244-277.

[BH] BÉDOS, E. et P. DE LA HARPE. Moyennabilité intérieure des groupès. *L'Enseignement Math. 32* (1986), 139-157.

[C] CONNES, A. Non commutative differential geometry. Chapter I. The Chern character in K-homology. *Publications Math. IHES N° 62* (1985), 41-144.

[DS] DELIGNE, P. and D. SULLIVAN. Division algebras and the Hausdorff-Banach-Tarski Paradox. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 145-150.

[DE] DUBINS, L. E. et M. EMERY. Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski. *Gazette des Mathématiciens 12* (1979), 71-76.

[GU] GOSCINNY et UDERZO. *Astérix chez les Bretons.* Dargaud 1966.

[Hf] HAUSDORFF, F. *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit 1914.

[He] DE LA HARPE, P. Free groups in linear groups. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 129-144.

[HS] HEWITT, E. and K. STROMBERG. *Real and abstract analysis.* Springer 1965.

[Ke] KESTEN, H. Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc. 22* (1959), 336-354.

[K] KURATOWSKI, C. Une propriété des correspondances biunivoques. *Fund. Math. 6* (1924), 240-243.

[Kö] KÖNIG, D. Sur les correspondances multivoques des ensembles. *Fund. Math. 8* (1926), 114-134.