§5. Classification des S.E.S.C.

par la surface euclidienne (close et de genre 2) avec une unique singularité conique d'angle 6π obtenue en identifiant de la façon usuelle les bords d'un octogone régulier du plan euclidien.

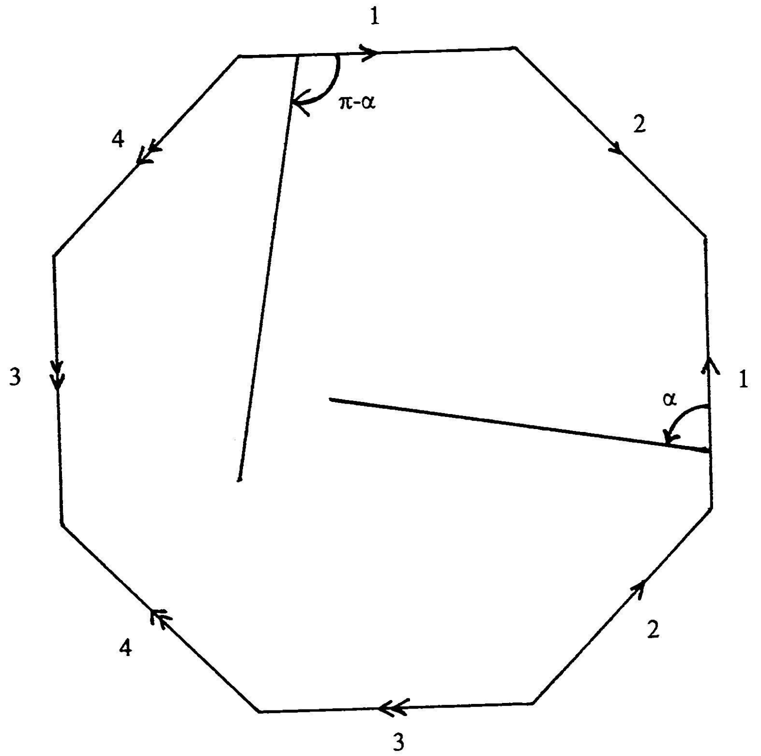

FIGURE 3

Si la structure de s.e.s.c. provenait d'une différentielle quadratique, il existerait un feuilletage géodésique sur S_0 (le feuilletage horizontal). Les feuilles devraient être des droites parallèles dans l'octogone rencontrant deux côtés identifiés selon des angles égaux. Cela est clairement impossible si les côtés identifiés ne sont pas parallèles.

Il est intéressant de noter que les différentielles quadratiques jouent un rôle central dans la théorie des déformations (des « modules ») des surfaces de Riemann (cf. [1]).

Pour une théorie complète des différentielles quadratiques, on peut se référer à [7].

§ 5. CLASSIFICATION DES S.E.S.C.

Rappelons qu'une métrique ds_1^2 sur une variété riemannienne (M, ds^2) est *conforme* s'il existe une fonction $h: M \to R$ telle que

$$ds_1^2 = e^{2h} ds^2 .$$

Lorsqu'il existe des singularités coniques, h peut prendre des valeurs infinies (avec croissance logarithmique).

Le résultat suivant classe toutes les s.e.s.c. closes et orientables.

THÉORÈME. *Soit S une surface close et orientable, $x_1, \ldots, x_n \in S$ et $\theta_1, \ldots, \theta_n > 0$ tels que*

$$\sum_i (2\pi - \theta_i) = 2\pi\chi(S).$$

Alors dans chaque structure conforme sur S, il existe une structure euclidienne pour laquelle x_i est une singularité conique d'angle $\theta_i (i=1, 2, \ldots n)$. Cette structure est unique si on la normalise (par exemple en posant: Aire totale de $S=1$).

Démonstration.

Unicité. Si ds et ds' sont deux telles structures, alors par conformité il existe une fonction h telle que $ds' = e^h ds$. Alors h doit être une fonction harmonique (pour la structure conforme donnée) et sans singularité (cf. prop. 3, § 1). Comme S est compacte, h est constante et comme l'aire est normalisée, cette constante est nulle.

Existence. Supposons que S soit de genre $g > 0$, alors il existe sur la surface de Riemann S une différentielle quadratique non nulle ω. Soient $y_1, \ldots, y_k$ les zéros de ω, alors $ds_0^2 = |\omega|$ définit une métrique euclidienne conforme sur S avec singularités coniques en y_j de poids $m_j/2$ (m_j est l'ordre du zéro y_j; cf. prop. 1, § 4). On a

$$\sum_j (m_j/2) = 2g - 2 = \sum_i \beta_i \quad \left(\beta_i = \frac{\theta_i}{2\pi} - 1\right).$$

Donc en particulier:

$$\sum_i \beta_i + \sum_j (-m_j/2) = 0.$$

Pour conclure, nous utiliserons le lemme ci-dessous:

LEMME. *Soit S une surface de Riemann close, $x_1, \ldots, x_n \in S$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$. Supposons $\sum_i \alpha_i = 0$. Alors il existe une fonction harmonique $h: S \to R$ avec singularités logarithmiques de poids α_i en $x_i (i=1, 2, \ldots, n)$. Si h et h' sont deux telles fonctions, elles diffèrent par une constante.*

Il existe donc une fonction harmonique $h: S \to R$ avec singularités logarithmiques de poids

$$\begin{cases} \beta_i \text{ en } x_i \, (i=1, \ldots, n) \\ -m_j/2 \text{ en } y_j \, (j=1, \ldots, k) \end{cases}$$

alors

$$ds^2 = e^{2h} ds_0^2$$

est la métrique cherchée (cf. prop. [3], § 1).

Ce raisonnement ne convient pas si $g = 0$, la sphère mérite donc des considérations particulières:

Par le théorème d'uniformisation de Riemann (cf. [6]), il n'existe (à isomorphisme près) qu'une structure conforme sur S^2. On peut donc poser $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Soit $a_i \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ la coordonnée de x_i, on peut supposer que $a_i \neq \infty$. Soit aussi $\beta_i = (\theta_i/2\pi) - 1$ alors on a

$$\sum_i \beta_i = -2$$

On pose:

$$ds^2 = \left(\prod_i |z - a_i|^{2\beta_i}\right) |dz|^2$$

Alors ds^2 est bien une métrique euclidienne ($\log \prod_i |z - a_i|^{\beta_i}$ est harmonique) et a_i est un point conique d'angle θ_i. Il ne reste plus qu'à vérifier que ∞ est un point régulier. Pour cela, on fait l'inversion $w = 1/z$ $\left(\text{donc } |dz|^2 = \dfrac{|dw|^2}{|w|^4}\right)$. On a

$$\prod_i |z - a_i|^{2\beta_i} = \prod_i |w|^{-2\beta_i} |1 - wa_i|^{2\beta_i} = |w|^4 \prod_i |1 - wa_i|^{2\beta_i}$$

(car $\sum_i \beta_i = -2$);

donc,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\prod_i |z - a_i|^{2\beta_i}\right) |dz|^2 = |w|^4 \prod_i |1 - wa_i|^{2\beta_i} |dw|^2/|w|^4 \\ &= \left(\prod_i |1 - wa_i|^{2\beta_i}\right) |dw|^2 \end{aligned}$$

est une métrique euclidienne régulière en $w = 0$ (c'est-à-dire $z = \infty$).

Ceci achève donc la preuve du théorème.