

§2. Représentation de Gelfand-Graev de G ET DÉCOMPOSITION DE SON ALGÈBRE D'ENTRELACEMENT A SUIVANT LES CARACTÈRES CENTRAUX DE G

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 2. REPRÉSENTATION DE GELFAND-GRAEV DE G
ET DÉCOMPOSITION DE SON ALGÈBRE D'ENTRELAACEMENT A
SUIVANT LES CARACTÈRES CENTRAUX DE G

Nous gardons les notations de l'introduction, F désigne le corps fini à q éléments, F^\times (resp. F^+) désigne le groupe multiplicatif (resp. additif) de F et $G = GL(2, F)$. Nous fixons, une fois pour toutes, un caractère non-trivial ψ de F^+ . La représentation de Gelfand-Graev V de G est définie par

$$V = \text{Ind}_U^G(\lambda),$$

où $U = \{u(b) \mid b \in F^+\}$, $u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $b \in F$, et $\lambda(u(b)) = \psi(b)$, pour tout $b \in F$. Nous allons étudier la structure de l'algèbre d'entrelacement $A = \text{End}_G(V)$. A ce propos, il est commode de travailler avec des idempotents dans l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ du groupe G .

Posons $e_\lambda := q^{-1} \sum_{u \in U} \lambda(u^{-1})u$. On a $e_\lambda^2 = e_\lambda$ et $u e_\lambda = \lambda(u)e_\lambda = e_\lambda u$, pour tout $u \in U$. La représentation induite V se réalise dans l'idéal à gauche $\mathbb{C}[G]e_\lambda$ engendré par l'idempotent e_λ et l'algèbre d'entrelacement A s'identifie à la sous-algèbre $e_\lambda \mathbb{C}[G]e_\lambda$ de l'algèbre du groupe.

Soit X le groupe des caractères de F^\times . Pour $\alpha \in X$, on définit un caractère du centre C de G , qu'on désignera par le même symbole α , en posant

$$c(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha(c(a)) = \alpha(a), \quad \text{pour } a \in F^\times.$$

Posons

$$e_\alpha := (q-1)^{-1} \sum_{c \in C} \alpha(c^{-1})c, \quad \text{pour } \alpha \in X.$$

On remarque que

$$e_\alpha^2 = e_\alpha, e_\alpha e_{\alpha'} = 0, \quad \text{si } \alpha \neq \alpha', \alpha, \alpha' \in X$$

et que

$$\sum_{\alpha \in X} e_\alpha = 1;$$

i.e. les $e_\alpha, \alpha \in X$, forment un système d'idempotents, deux à deux orthogonaux, de somme 1. Chaque $e_\alpha, \alpha \in X$, est un idempotent central, i.e. e_α est dans le centre de l'algèbre du groupe. Posons

$$H = CU.$$

On définit un caractère $\alpha\lambda$ de H par

$$(\alpha\lambda)(cu) = \alpha(c)\lambda(u), \quad \text{pour } c \in C, u \in U.$$

Posons

$$V_\alpha = \text{Ind}_H^G(\alpha\lambda), \quad \text{pour tout } \alpha \in X;$$

cette représentation induite se réalise dans l'idéal à gauche $C[G]e_\alpha e_\lambda$ et l'on a

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X} V_\alpha.$$

L'algèbre d'entrelacement A_α de V_α s'identifie à l'algèbre $e_\alpha e_\lambda C[G] e_\alpha e_\lambda$ qui est égale à $e_\lambda C[G] e_\alpha e_\lambda$, d'où

$$A = \bigoplus_{\alpha \in X} A_\alpha.$$

Dans la suite, on se fixe un caractère central α et l'on étudie l'algèbre A_α .

§ 3. DESCRIPTION DE A_α EN TERMES DE GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

Posons $e = e_\theta$ avec $\theta = \alpha\lambda$, on a alors $A_\alpha = e C[G] e = \text{End}_G(\text{Ind}_H^G(\theta))$. Soit R un système de représentants des doubles classes de G suivant H . On sait que l'ensemble

$$B = \{ere \mid r \in R, ere \neq 0\}$$

forme une base de A_α en tant qu'espace vectoriel sur C . Pour $h, h' \in H, r \in R$, l'on a

$$e h r h' e = \theta(hh') ere.$$

Pour tout $g \in G$, on définit un caractère $g\theta$ de $g H g^{-1}$ par $(g\theta)(x) = \theta(g^{-1}xg)$, si $x \in g H g^{-1}$. On sait que, pour tout $g \in G$, la condition $ege \neq 0$ équivaut à

$$\theta_{/H \cap g H g^{-1}} = g \theta_{/H \cap g H g^{-1}}.$$

Rappelons que