

# Chapitre 5: Le problème caractéristique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

lorsque  $t > 0$  tend vers 0. En effet, comme  $b(\delta_k) = 0$  pour tout  $k$ , nous obtenons par application répétée du théorème de Rolle que pour tous  $j$  et  $k$  entiers positifs, il existe un point  $\theta_k^j \in ]\delta_{k+j}, \delta_k[$  tel que  $\partial_t^j b(\theta_k^j) = 0$ ; la limite annoncée en résulte.

## CHAPITRE 5: LE PROBLÈME CARACTÉRISTIQUE

Dans ce chapitre, nous donnons deux résultats: l'un d'unicité, l'autre de non-unicité.

Au paragraphe 5.1, nous regardons ce qui subsiste du théorème 1.2 lorsque nous supprimons l'hypothèse que le problème est non caractéristique. Le résultat d'unicité (théorème 5.2) découlera d'un théorème sur la géométrie du support d'une solution (théorème 5.1) qui est dû à Bony (cf. Sjöstrand [22, th. 8.7] qui en donne une extension aux équations d'ordres supérieurs).

Puis au paragraphe suivant (5.2) nous construisons un contre-exemple à l'unicité sous la condition que le rang de  $\mathcal{L}$  est constant. Ce dernier résultat est dû à Saint Raymond [21, th. 2.9].

### 5.1. RÉSULTAT D'UNICITÉ LORSQUE $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.2, mais sans nous donner de fonction  $\varphi$  ni supposer que le problème est non caractéristique. Cela signifie que nous sommes dans l'un des deux cas suivants:

1.  $L$  vérifie la condition (R) dans un ouvert  $\Omega$  où  $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$  (cf. 1.2).
2.  $L$  vérifie la condition (P) dans un ouvert  $\Omega$  (cf. 1.2).

Donnons-nous de plus une solution  $u \in C^1(\Omega)$  de l'équation  $(L + c_0)u(x) = 0$  dans  $\Omega$ . Alors, pour paraphraser le théorème 1.2, chaque fois que l'on trouvera  $x_0 \in \Omega$  et  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$  à valeurs réelles tels qu'il existe un voisinage  $\omega$  de  $x_0$  avec

$$x_0 \in (\text{supp } u \cap \omega) \subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\},$$

on pourra affirmer que le problème en  $x_0$  est caractéristique, c'est-à-dire que  $L\varphi(x_0) = 0$  ou encore que  $X\varphi(x_0) = Y\varphi(x_0) = 0$  (si  $X = \text{Re } L$  et  $Y = \text{Im } L$ ). Cette remarque nous donne une relation entre les champs réels  $X$  et  $Y$  et le fermé  $F = \text{supp } u$  dont nous allons analyser les conséquences dans le prochain théorème.

Avant de l'énoncer, rappelons qu'un champ réel  $X$  (éventuellement dégénéré) défini dans un ouvert  $\Omega$  vérifie toujours la propriété (R). En effet, pour les points  $x$  où  $X$  s'annule,  $\{x\}$  est une variété intégrale, et dans l'ouvert où  $X$  ne s'annule pas, le rang est constamment égal à 1 d'où la propriété grâce au théorème de Frobenius (cf. 1.2). Si  $X = \sum a_j(x) \partial_j$ , nous noterons  $e^{tX}x_0$  la solution  $x(t)$  du système différentiel ordinaire suivant :

$$\begin{cases} x'_j(t) = a_j(x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Si  $X = 0$  en  $x_0$ ,  $e^{tX}x_0$  reste égal à  $x_0$ , tandis que si  $X \neq 0$  en  $x_0$ ,  $e^{tX}x_0$  décrit la courbe intégrale de  $X$  passant par  $x_0$ .

**THÉORÈME 5.1.** *Soient  $X$  un champ réel défini dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$ , et  $F \subset \Omega$  une partie fermée dans  $\Omega$ . Supposons que pour tout  $x_0 \in \Omega$  et toute  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$  à valeurs réelles,*

$$\begin{aligned} [\exists \omega \text{ ouvert de } \Omega : x_0 \in F \cap \omega \subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}] \\ \Rightarrow X\varphi(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Alors, pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$x_0 \in F \cap K \quad \text{et} \quad |t| < \varepsilon \Rightarrow e^{tX}x_0 \in F.$$

*Démonstration.* Pour un compact  $K$  fixé, choisissons un voisinage compact  $W$  de  $K$  (c'est-à-dire  $K \subset \overset{\circ}{W}$ ,  $W$  compact de  $\Omega$ ); il existe alors  $\varepsilon_1 > 0$  ne dépendant que de  $K$ , de  $W$  et de  $X$  tel que pour  $x_0 \in K$  et  $t \in ]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[$ ,  $e^{tX}x_0$  soit bien défini et reste dans  $W$ ; par la suite, chaque  $\varepsilon$  que nous choisirons sera plus petit que le précédent, et ne dépendra que de  $K$ ,  $W$ ,  $X$  et  $F$ .

Pour tout  $x_0 \in K$ , le système

$$(5.1) \quad \begin{cases} \partial_t \varphi(t, x) + X\varphi(t, x) = 0 \\ \varphi(0, x) = |x - x_0|^2 \end{cases}$$

admet une solution  $\varphi$  (dépendant de  $x_0$ ) définie dans  $]-\varepsilon_2, \varepsilon_2[ \times W$  pour un  $\varepsilon_2 > 0$ . La dérivée par rapport à  $t$  de  $\varphi(t, e^{tX}x_0)$  est nulle à cause de l'équation (5.1), d'où  $\varphi(t, e^{tX}x_0) = \varphi(0, x_0) = 0$ . Puis dérivons la fonction  $\varphi_j(t) = \partial_j \varphi(t, e^{tX}x_0)$ ; nous obtenons (en utilisant (5.1)):

$$\begin{aligned}\varphi'_j(t) &= \left( \partial_j [\partial_t \varphi(t, x)] + X [\partial_j \varphi(t, x)] \right) \Big|_{x=e^{tX}x_0} \\ &= [X, \partial_j] \varphi(t, x) \Big|_{x=e^{tX}x_0} = \sum_{k=1}^n \partial_j a_k(e^{tX}x_0) \varphi_k(t)\end{aligned}$$

d'où  $\varphi_j(t) = 0$  puisque c'est vérifié en  $t = 0$ . Comme  $\varphi(0, x) = |x - x_0|^2$ , il existe un  $\varepsilon_3 > 0$  tel que si  $x_0 \in K$ ,  $x \in W$  et  $|t| < \varepsilon_3$ ,

$$(5.2) \quad \varphi(t, x) \geq \frac{1}{2} |x - e^{tX}x_0|^2.$$

Pour  $x_0 \in F \cap K$ , nous avons  $0 = \inf_{x \in F \cap W} \varphi(0, x) < \inf_{x \in F \cap \partial W} \varphi(0, x)$  et donc cette inégalité reste vraie lorsque  $|t| < \varepsilon$  pour un  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  fixé, il existe donc un point  $x_t \in F \cap \overset{\circ}{W}$  où  $\varphi(t, x)$  atteint sa borne inférieure, soit :

$$x_t \in (F \cap \overset{\circ}{W}) \subset (\overset{\circ}{W})_+ = \{x \in \overset{\circ}{W} \mid \varphi(t, x) \geq \varphi(t, x_t)\}.$$

En utilisant l'hypothèse du théorème on obtient  $X\varphi(t, x_t) = 0$ , et en utilisant l'équation (5.1),  $\partial_t \varphi(t, x_t) = 0$ . Nous avons donc pour tous  $|t| < \varepsilon$  et  $|s| < \varepsilon$ ,

$$\begin{aligned}O((t-s)^2) &= \varphi(t, x_t) - \varphi(s, x_t) \leq \varphi(t, x_t) - \varphi(s, x_s) \leq \varphi(t, x_s) - \varphi(s, x_s) \\ &= O((t-s)^2)\end{aligned}$$

d'où  $\varphi(t, x_t) = \varphi(0, x_0) = 0$ . Par (5.2) nous en déduisons que pour  $x_0 \in F \cap K$  et  $|t| < \varepsilon$ ,  $e^{tX}x_0 = x_t \in F$ .

Pour pouvoir tirer les conséquences pour l'unicité de ce théorème, il nous faut introduire un nouvel objet géométrique.

Si  $L$  vérifie la condition (P) dans un voisinage  $\Omega$  d'un point  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , choisissons des coordonnées (lemme 1.3) dans lesquelles  $L$  s'écrit  $\partial_t + ib \cdot \partial_y$  à un facteur non nul près, et notons  $\mathcal{V}_1$  la courbe intégrale du champ réel  $\partial_t$  passant par  $x_0$ . Si le rang de  $\mathcal{L}$  reste égal à 1 au voisinage de  $x_0$  sur  $\mathcal{V}_1$ , nous dirons que  $\mathcal{V}_1$  est la « feuille de  $\mathcal{L}$  passant par  $x_0$  ». Si au contraire on peut trouver des points de  $\mathcal{V}_1$  arbitrairement proches de  $x_0$  où le rang de  $\mathcal{L}$  est égal à 2, nous savons par la propriété (P) qu'il existe une variété  $\mathcal{V}_2$  de dimension 2 contenant  $\mathcal{V}_1$  et à laquelle le champ  $L$  reste tangent au voisinage de  $x_0$ ; dans ce deuxième cas, nous dirons que  $\mathcal{V}_2$  est la « feuille de  $\mathcal{L}$  passant par  $x_0$  » (on remarquera que  $\mathcal{V}_2$  n'est pas nécessairement une variété intégrale de  $\mathcal{L}$ , et que dans les deux cas la feuille de  $\mathcal{L}$  passant par  $x_0$  est une notion géométrique indépendante des coordonnées choisies).

De même, pour n'énoncer qu'un seul théorème, si  $L$  vérifie la condition (R) dans un voisinage  $\Omega$  d'un point  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , nous appellerons « feuille de  $\mathcal{L}$  passant par  $x_0$  » la variété intégrale de  $\mathcal{L}$  passant par  $x_0$ .

Dans l'énoncé suivant,  $\mathcal{V}$  désigne la feuille de  $\mathcal{L}$  passant par  $x_0$ .

**THÉORÈME 5.2.** *Supposons qu'il existe un voisinage  $\Omega$  de  $x_0$  tel que l'on se trouve dans l'une des deux situations suivantes :*

1.  $L$  vérifie la condition (R) et  $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$  dans  $\Omega$ .
2.  $L$  vérifie la condition (P) dans  $\Omega$ .

Si de plus, pour tout voisinage  $\omega$  de  $x_0$ ,

$$\mathcal{V} \cap \omega \not\subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\},$$

alors pour tout voisinage  $\omega$  de  $x_0$  et toute  $u \in C^1(\omega)$  solution du système

$$(5.3) \quad \begin{cases} (L+c_0)u(x) = 0 & \text{dans } \omega, \text{ et} \\ u(x) = 0 & \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction  $u$  s'annule au voisinage de  $x_0$ .

*Démonstration.* Soit  $u \in C^1(\omega)$  une solution du problème (5.3); supposons que  $x_0 \in \text{supp } u$ . Nous allons montrer qu'il existe alors un voisinage de  $x_0$  sur  $\mathcal{V}$  entièrement contenu dans  $\text{supp } u$ . En utilisant ensuite l'hypothèse sur  $\mathcal{V}$  du théorème, nous en déduisons qu'il existe des points  $x \in \text{supp } u$  tels que  $\varphi(x) < \varphi(x_0)$  ce qui contredit le fait que  $u = 0$  dans  $\omega_-$ . C'est donc que  $x_0 \notin \text{supp } u$ , c'est-à-dire que  $u = 0$  au voisinage de  $x_0$ .

Montrons donc que si  $x_0 \in \text{supp } u$ , il existe un voisinage de  $x_0$  sur  $\mathcal{V}$  entièrement contenu dans  $\text{supp } u$ . Le champ  $L$  étant non dégénéré, nous pouvons trouver (lemme 1.3) des coordonnées locales  $(y, t)$  telles que

1.  $x_0 = (0, 0)$ ,
2.  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$  à un facteur non nul près.

Comme  $(L+c_0)u(x) = 0$  dans  $\omega$ , nous pouvons affirmer grâce au théorème 1.2 que les hypothèses du théorème 5.1 sont vérifiées dans  $\omega$  avec  $F = \text{supp } u$  et chacun des deux champs réels  $X = \partial_t$  et  $Y = b(y, t) \cdot \partial_y$ . Nous devons alors distinguer deux cas :

1. Si  $\dim \mathcal{V} = 1$ , il suffit d'appliquer le théorème 5.1 avec  $X$  et  $K = \{x_0\}$  pour obtenir un voisinage de  $x_0$  sur  $\mathcal{V}$  entièrement contenu dans  $\text{supp } u$ .
2. Si  $\dim \mathcal{V} = 2$ , nous pouvons trouver un voisinage de  $x_0$  inclus dans  $\omega$  qui soit de la forme  $\{(y, t) \in \mathbf{R}^n \mid |y| < \delta \text{ et } |t| \leq T\}$  pour un  $\delta > 0$

et un  $T > 0$  avec  $b(y, T) \neq 0$  pour tout  $y$  tel que  $|y| < \delta$  (sinon, changer  $t$  en  $-t$ ). Prenons alors sur  $\mathcal{V}$  les coordonnées  $(z, t)$  où  $z$  est l'abscisse curviligne associée au champ  $b(y, T) \cdot \partial_y$ ; on notera  $z_0$  l'abscisse de  $x_0$ . Il existe alors un  $\alpha > 0$  tel que  $K = [z_0 - \alpha, z_0 + \alpha] \times [-T, T]$  soit un voisinage compact de  $x_0$  dans  $\mathcal{V}$  contenu dans le voisinage précédent.

Dans ces conditions, tout point de  $K$  est dans le support de  $u$ ; en effet,  $(z_0, 0) = x_0 \in \text{supp } u$  par hypothèse, puis étant donné  $(z, t) \in K$ , on obtient par l'utilisation répétée du théorème 5.1 avec tantôt  $X$ , tantôt  $Y$ , que

$$(z, t) = e^{(t-T)X} e^{(z-z_0)Y} e^{TX}(z_0, 0) \in \text{supp } u \cap K.$$

*Remarque.* Le théorème de Bony (théorème 5.1 ci-dessus) permet aussi de démontrer des théorèmes d'unicité globale. A titre d'exemple, énonçons le résultat pour un problème mi-local, mi-global: dans

$$\Omega = \{(y, t) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 + t^2 < 2\},$$

considérons le champ

$$\begin{cases} L = \partial_y + i e^{\frac{1}{y+1}} \partial_t & \text{si } y < -1, \\ L = \partial_y & \text{si } y \geq -1. \end{cases}$$

Alors, pour tout voisinage  $\omega$  de  $(0, 0)$  et toute  $u \in C^1(\Omega)$  solution du système

$$\begin{cases} (L + c_0)u(x) = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et} \\ u(x) = 0 & \text{dans } \omega_- = \{(y, t) \in \omega \mid t \leq 0\}, \end{cases}$$

la fonction  $u$  s'annule au voisinage de  $(0, 0)$ .

(On remarquera que ce problème ne possède pas la propriété d'unicité locale; en effet, dans  $\omega = \{(y, t) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 + t^2 < 1\}$ , la fonction

$$\begin{cases} u(y, t) = \exp\left(-\int_0^y c_0(z, t) dz - \frac{1}{t}\right) & \text{si } t > 0, \\ u(y, t) = 0 & \text{si } t \leq 0, \end{cases}$$

est  $C^\infty$ , solution de  $(L + c_0)u(x) = 0$  dans  $\omega$ , et vérifie  $\text{supp } u = \omega_+ = \{(y, t) \in \omega \mid t \geq 0\}$ ).

## 5.2. CONTRE-EXEMPLE À L'UNICITÉ LORSQUE LE RANG DE $\mathcal{L}$ EST CONSTANT

Lorsque le rang de  $\mathcal{L}$  est constant, le champ  $L$  vérifie la condition (R) d'après le théorème de Frobenius (cf. 1.2). Dans l'énoncé suivant,  $\mathcal{V}$  désigne la variété intégrale de  $\mathcal{L}$  passant par  $x_0$ .

THÉORÈME 5.3. Supposons qu'il existe un voisinage  $\Omega$  de  $x_0$  tel que le rang de  $\mathcal{L}$  soit constant dans  $\Omega$  et que

$$\mathcal{V} \cap \Omega \subset \Omega_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}.$$

Alors il existe un voisinage  $\omega$  de  $x_0$ ,  $u \in C^\infty(\omega)$  et  $a \in C^\infty(\omega)$  tels que

$$(5.4) \quad \begin{cases} (L+c_0+a)u(x) = 0 & \text{dans } \omega, \\ \mathcal{V} \cap \omega \subset \text{supp } u \subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}, & \text{et} \\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \partial_x^\alpha a(x_0) = 0 & (a \text{ est « plate » en } x_0). \end{cases}$$

De plus, si  $c_0 = 0$ , on peut choisir  $a = 0$ .

*Démonstration.* Le rang de  $\mathcal{L}$  étant constant, on peut trouver des coordonnées locales dans un voisinage  $\omega$  de  $x_0$  qui redressent les variétés intégrales de  $\mathcal{L}$ , ou plus précisément, des coordonnées  $x = (x', x'', x_n)$  avec  $x' = (x_1, \dots, x_r)$  et  $x'' = (x_{r+1}, \dots, x_{n-1})$ , telles que:

1.  $x_0 = (0, 0, 0)$ .
2.  $d\varphi(x_0) = (0, 0, 1)$ .
3. Les variétés intégrales de  $\mathcal{L}$  ont pour équations  $x'' = Cte$ ,  $x_n = Cte$  (en particulier,  $\mathcal{V}$  a pour équation  $x'' = 0$ ,  $x_n = 0$ ).

Dans ce qui va suivre, nous aurons éventuellement besoin de réduire le voisinage  $\omega$ . Le nombre d'étapes étant fini, et les propriétés obtenues restant vraies si on réduit le voisinage, nous utiliserons toujours la même lettre  $\omega$  sans préciser les modifications de ce dernier.

Comme  $L$  reste tangent aux variétés intégrales de  $\mathcal{L}$ , nous avons  $L\psi(x) = 0$  dans  $\omega$  si  $\psi(x) = x_n^3 - |x''|^2$ . Posons

$$(5.5) \quad \begin{cases} u_0(x) = \exp(-1/\psi(x)) & \text{si } x \in \omega \text{ et } \psi(x) > 0, & \text{et} \\ u_0(x) = 0 & \text{si } x \in \omega \text{ et } \psi(x) \leq 0. \end{cases}$$

Alors  $u_0 \in C^\infty(\omega)$ ,  $Lu_0(x) = 0$  dans  $\omega$  et  $\mathcal{V} \cap \omega \subset \text{supp } u_0$  puisque  $u_0(x', 0, \varepsilon) > 0$  pour tout  $x'$  et tout  $\varepsilon > 0$  tels que  $(x', 0, \varepsilon) \in \omega$ . Pour voir que  $\text{supp } u_0 \subset \omega_+$ , il faut exprimer  $\varphi$  dans les coordonnées  $(x', x'', x_n)$ .

Par le théorème des fonctions implicites (cf. le point 2 ci-dessus), il existe une fonction  $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$  telle que  $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)$  équivaut dans  $\omega$  à  $x_n + \varphi_0(x', x'') \geq 0$ . L'hypothèse sur  $\mathcal{V}$  du théorème nous indique que  $\varphi_0(x', 0) \geq 0$  dans  $\omega$  (cf. le point 3 ci-dessus), donc par développement de Taylor en  $x''$  à l'ordre zéro,  $\varphi_0(x', x'') \geq -C|x''|$  dans  $\omega$  pour une constante  $C < \infty (C > 0)$ . Si donc on a choisi  $\omega$  assez petit pour que  $|x''| < C^{-3}$  dans  $\omega$ ,

$$u_0(x) \neq 0 \Rightarrow \psi(x) > 0 \Rightarrow x_n > |x''|^{2/3} \Rightarrow x_n + \varphi_0(x', x'') > 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$$

d'où  $\text{supp } u_0 \subset \omega_+$ .

Nous avons donc donné une solution du problème (5.4) lorsque  $c_0 = 0$ . Sinon, le champ  $L$  étant non dégénéré, choisissons (lemme 1.3) des coordonnées  $(y, t)$  telles que

1.  $x_0 = (0, 0)$ .
2.  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$  à un facteur non nul près.

Pour tout  $j \in \mathbf{N}$ , posons alors

$$b_j(y) = \partial_t^j b(y, 0) \quad \text{et} \quad c_j(y) = \partial_t^j c(y, 0),$$

puis par récurrence,

$$(5.6) \quad \begin{cases} v_0(y) = 0, \\ v_{j+1}(y) = - \sum_{k=0}^j C_j^k b_k(y) \cdot \partial_y v_{j-k}(y) - c_j(y) \quad \text{pour } j \geq 0. \end{cases}$$

Par le théorème de Borel (cf. Hörmander [11, th. 1.2.6]), il existe une fonction  $v \in C^\infty(\omega)$  telle que  $\partial_t^j v(y, 0) = v_j(y)$ . Par (5.6), nous obtenons que la fonction

$$a(y, t) = - (\partial_t v(y, t) + ib(y, t) \cdot \partial_y v(y, t) + c(y, t))$$

est plate en  $(0, 0)$ .

La fonction  $u(x) = e^{v(x)} u_0(x)$ , où  $u_0$  est donnée par (5.5) et  $v$  par ce qui précède est alors solution du problème (5.4).

*Remarques.* 1) Pour une discussion du rôle du terme d'ordre zéro, on se reportera au chapitre suivant.

2) On notera que par les théorèmes 5.2 et 5.3 nous avons complètement élucidé la question de l'unicité pour les problèmes caractéristiques de rang constant. En effet, distinguons les deux situations suivantes :

$\alpha$  — Le rang de  $\mathcal{L}$  est inférieur ou égal à 2. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait unicité (pour toute perturbation  $a$  plate en  $x_0$ ) est alors que la variété intégrale de  $\mathcal{L}$  passant par  $x_0$  ne reste pas localement dans  $\{\varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$  (c'est nécessaire par le théorème 5.3, et suffisant par le théorème 5.2).

$\beta$  — Le rang de  $\mathcal{L}$  est supérieur ou égal à 3. Alors il n'y a jamais unicité « stable ». En effet, deux cas peuvent se produire: s'il existe des



points arbitrairement proches de  $x_0$  dans  $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$  où le problème n'est pas caractéristique, nous pouvons appliquer le théorème 1.1; si le problème est caractéristique en tous les points de  $S$ , c'est que la variété intégrale de  $\mathcal{L}$  passant par  $x_0$  reste localement dans  $S$ , et nous pouvons appliquer le théorème 5.3.

## CHAPITRE 6: RÔLE DU TERME D'ORDRE ZÉRO

Aux théorèmes 1.1, 2.2, 4.2 et 5.3, nous avons dû modifier le terme d'ordre zéro pour montrer qu'il n'y avait pas unicité de Cauchy. Il est alors naturel de se demander si de tels problèmes possèdent tout de même la propriété d'unicité pour certains termes d'ordre zéro. La réponse à cette question est positive comme nous le verrons ci-dessous.

Cependant, le rôle du terme d'ordre zéro est encore mal connu. Nous nous bornerons ici à énoncer deux remarques qui suggèrent la nature des conditions à imposer. La première d'entre elles (théorème 6.1) est due à Lewy [15].

Avant d'énoncer le premier théorème, rappelons que la résolubilité locale d'un champ complexe non dégénéré a été étudiée par Nirenberg et Trèves [17], et que sous les hypothèses du théorème 2.2, ainsi que sous les hypothèses du théorème 5.3 si  $\text{rg } \mathcal{L} \geq 3$ , le champ  $L$  n'est localement résoluble en aucun point d'un voisinage de  $x_0$ ; de même, les hypothèses des théorèmes 1.1 et 4.2 entraînent qu'il existe de nombreux points voisins de  $x_0$  où  $L$  n'est pas localement résoluble. Il en résulte qu'il existe des fonctions  $C^\infty c$  telles que l'équation  $Lv - c = 0$  ne possède pas de solution  $v$  au voisinage de ces points.

**THÉORÈME 6.1.** *Soit  $\mathcal{N}_j(c_0)$  l'ensemble des points de  $\mathbf{R}^n$  au voisinage desquels l'équation  $Lv(x) + c_0(x) = 0$  ne possède pas de solution  $v \in C^j$ . S'il existe un voisinage  $\Omega$  de  $x_0$  tel que*

$$\overline{\mathcal{N}_j(c_0)} \supset \Omega_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\},$$

alors pour tout voisinage  $\omega$  de  $x_0$  et toute  $u \in C^j(\omega)$  solution du système

$$(6.1) \quad \begin{cases} (L+c_0)u(x) = 0 & \text{dans } \omega \text{ et} \\ u(x) = 0 & \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction  $u$  s'annule au voisinage de  $x_0$ .