

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1986)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE
Autor: Raymond, Xavier Saint
Kapitel: 3.5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (P)
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-55077>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

duisons les paraboles P_τ d'équations $\psi(z, t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_1, t_1) du support de la trace de u sur $\mathcal{V}$ tel que $u = 0$ dans $\{(z, t) \in \mathcal{V} \mid \psi(z, t) \leq \psi(z_1, t_1)\}$. Or le problème (pour ψ) est non caractéristique en (z_1, t_1) et $\text{rg } \mathcal{L}(z_1, t_1) = 2$ puisque nous sommes sur une variété intégrale de $\mathcal{L}$ de dimension 2. Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.4 pour conclure que u est nulle au voisinage de (z_1, t_1) sur $\mathcal{V}$, ce qui contredit le fait que (z_1, t_1) est un point du support de la trace de u sur $\mathcal{V}$.

Nous avons donc obtenu que $u = 0$ dans $v \times]-T, T[$.

3.5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (P)

Comme le problème est non caractéristique, nous pouvons faire usage du lemme 1.3 pour trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, un voisinage v de 0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$ et un nombre $T > 0$ tels que

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ dans $v \times]-T, T[$ à un facteur non nul près,
4. $v \times]-T, T[\subset \omega \cap \Omega$.

Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (1.2) et supposons qu'il existe $(y_0, t_0) \in v \times]0, T[$ tel que $u(y_0, t_0) \neq 0$. Si on avait $b(y_0, t) = 0$ pour tout $t \in]0, t_0[$, l'équation se réduirait à une équation différentielle ordinaire, ce qui conduirait à une contradiction.

Il existe donc $t_1 \in]0, t_0[$ tel que $b(y_0, t_1) \neq 0$. Il existe aussi tout un voisinage de y_0 tel que $b(y, t_1) \neq 0$ pour y dans ce voisinage, par continuité, et le vecteur

$$d(y) = b(y, t_1) / |b(y, t_1)|$$

est bien défini et régulier au voisinage de y_0 ; par conséquent, le champ réel $d(y) \cdot \partial_y$ admet en y_0 une courbe intégrale que nous noterons γ .

Comme la condition (P) est vérifiée dans $v \times]0, T[$, nous avons $b(y, t) = |b(y, t)| d(y)$ pour tout $(y, t) \in \gamma \times]0, T[$, et donc le champ L est tangent à $\gamma \times]0, T[$; nous pouvons désormais nous restreindre à $\gamma \times]-T, T[$ qui contient le point (y_0, t_0) où u ne s'annule pas et sur lequel nous prenons comme coordonnées le couple (z, t) où z est l'abscisse curviligne sur γ associée au champ $d(y) \cdot \partial_y$; z_0 désignera l'abscisse du point (y_0, t_0) .

Par continuité, il existe un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que le problème restreint à $\gamma \times]-T, T[$ se présente de la façon suivante :

1. $\mathcal{V} =]z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon[\times]-T, T[\subset \gamma \times]-T, T[$;
2. $u(z, t_0) \neq 0$ pour $z \in]z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon[$;
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(z, t) \partial_z + c(z, t)$ dans $\mathcal{V}_+ =]z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon[\times [0, T[$;
4. $b(z, t) \geq 0$ dans $\mathcal{V}_+$ (par la condition (P)).

Comme dans la démonstration du théorème 3.4, introduisons la fonction $\psi(z, t) = t + t_0(z - z_0)^2 \varepsilon^{-2}$ et les paraboles P_τ d'équations $\psi(z, t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_2, t_2) du support de la trace de u sur $\mathcal{V}_+$ tel que $t_2 < t_0$ et $u = 0$ dans $\{(z, t) \in \mathcal{V} \mid \psi(z, t) \leq \psi(z_2, t_2)\}$.

Comme tout à l'heure, si on avait $b(z_2, t) = 0$ pour tout $t \in]t_2, T[$, on prouverait que $u(z_2, t_0) = 0$ ce qui contredit le point 2 ci-dessus. Il existe donc $t_3 \in]t_2, T[$ tel que $b(z_2, t_3) > 0$. Nous distinguons alors deux cas de figure :

1. Si $t_2 > 0$, posons $\theta(z) = t_2 + t_0 \left(\frac{z_2 - z_0}{\varepsilon} \right)^2 - t_0 \left(\frac{z - z_0}{\varepsilon} \right)^2$ (en sorte que $t \geq \theta(z) \Leftrightarrow \psi(z, t) \geq \psi(z_2, t_2)$). Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2, t_2) contenant (z_2, t_3) (où $b > 0$) tel que b soit positive dans $w_+ = \{(z, t) \in w \mid t \geq \theta(z)\}$ et $u = 0$ dans $w_- = \{(z, t) \in w \mid t \leq \theta(z)\}$. Par le lemme 3.3 nous en déduisons que $u = 0$ au voisinage de (z_2, t_2) ce qui contredit le fait que (z_2, t_2) est un point du support de la trace de u sur $\mathcal{V}_+$.
2. Si $t_2 = 0$, posons $\theta(z) = 0$. Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2, t_2) possédant les mêmes propriétés que dans le cas précédent, d'où la même conclusion.

CHAPITRE 4: ETUDE D'UN MODÈLE DANS $\mathbf{R}^2$

Lorsque nous supprimons les hypothèses « techniques », le théorème 1.2 devient faux; c'est ce que montre l'un des premiers contre-exemples à l'unicité de Cauchy historiquement construits: le contre-exemple de Cohen [8]. Plutôt que d'en répéter la construction, que le lecteur trouvera par exemple dans Hörmander [9, th. 8.9.2], nous avons préféré étudier de façon assez précise un modèle dans $\mathbf{R}^2$ (ce qui assure que $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$) qui fournit des contre-exemples où le champ L est complètement explicite; c'est l'objet de ce chapitre.