1. La projection de G(Q)Z(A)\G(A) sur la place à l'infini

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Chapitre VI

La formule intégrale de Hecke

Le but de ce chapitre est d'utiliser la formule établie dans le théorème 1, dans le cas particulier où k est le corps $\mathbf{Q}$ et E un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$, afin d'obtenir la formule intégrale de Hecke classique (Réf. [H]). Dans un premier paragraphe on construira une application de l'ensemble des matrices $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ dans l'ensemble $G(\mathbf{Z})\cdot Z_\infty\backslash G(\mathbf{R})$ des matrices réelles et on calculera l'image par cette application du tore $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$. Dans le deuxième paragraphe, on utilisera cette application pour retrouver la formule de Hecke à partir de l'identité du chapitre précédent (Théorème 1).

1. La projection de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ sur la place à l'infini

A. *La projection* $\pi_1 : G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A}) \to Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$

L'ensemble Z_∞ désigne le sous-groupe de $G(\mathbf{A})$ constitué des matrices z telles que z_∞ soit une matrice scalaire non nulle et z_p est la matrice identité pour tout nombre p premier.

Soient $M \in G(\mathbf{A})$ et $z \in (\mathbf{A})$ avec

$$Z = \begin{pmatrix} z_p & & \\ & \ddots & \\ & & z_p \end{pmatrix}$$

où pour p fini, on exige que $z_p \in \mathbf{Z}_p^\times$ pour presque tout p et $z_p \in \mathbf{Q}_p^\times$ pour tout p.

Soit S l'ensemble des nombres premiers p tels que $z_p \notin \mathbf{Z}_p^\times$ et soit p un élément de S, il existe un entier n_p vérifiant

$$p^{n_p}\cdot z_p \in \mathbf{Z}_p^\times .$$

Soit Q la matrice scalaire de $Z(\mathbf{Q})$ dont les éléments diagonaux valent $\prod_{p\in S} p^{n_p}$; ZQ est une matrice de $Z_\infty\cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$.

Soit $(ZQ)_f$ la matrice adélique coïncidant avec ZQ aux places finies et égale à 1 à la place infinie, et $(ZQ)_\infty$ la matrice adélique égale à $Z_\infty Q$ à la place infinie et égale à 1 aux places finies; on a la décomposition suivante:

$$\begin{aligned} ZM &= ZQ \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty \cdot (ZQ)_f \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty \, Q^{-1}M(ZQ)_f \,. \end{aligned}$$

Ce qui précède montre que la projection π_1 qui a un élément de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ fait correspondre la classe dans $Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ d'un représentant quelconque de cet élément, est bien définie.

B. *Il y a une bijection* π_2 *entre* $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ *et* $G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$

En effet, on considère l'application de $G(\mathbf{R})$ dans $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ qui a une matrice g de $G(\mathbf{R})$ associe la classe de $(g, 1, ..., 1, ...)$ dans $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})$ $/G(\hat{\mathbf{Z}})$. Cette application est surjective puisqu'on a la décomposition bien connue de $G(\mathbf{A})$:

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q}) \cdot G^+(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$$

(voir par exemple [5], pp. 143-146 pour le cas $n = 2$ et la démonstration est la même pour n quelconque).

Supposons que les matrices g et g' aient la même image. Alors on a une égalité

$$\gamma g k = \gamma' g' k' ,$$

avec $\gamma, \gamma' \in G(\mathbf{Q})$ et $k, k' \in G(\hat{\mathbf{Z}})$; par suite

$$\gamma^{-1}\gamma' = g\,k\,k'^{-1}\,g'^{-1} = g\,g'^{-1}\,k\,k'^{-1} .$$

Mais l'intersection $G(\mathbf{Q}) \cap G(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$ est réduite à $G(\mathbf{Z})$; cela entraîne l'existence d'un élément σ de $G(\mathbf{Z})$ tel que

$$\gamma' = \gamma\sigma , \qquad g = \sigma g' , \qquad k = \sigma k' .$$

Ainsi g et g' ont la même image si et seulement si ces matrices sont congrues modulo $G(\mathbf{Z})$. On a démontré:

Proposition 10. *L'application* $\pi_2 \circ \pi_1$ *où*

$$\pi_1 : G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A}) \to Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et

$$\pi_2 : Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}}) \to Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$$

sont définies comme précédemment, n'est autre que la projection canonique de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ *sur* $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$.

C. *L'image du tore* $T(\mathbf{A})$ *dans* $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$

L'image de $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$ dans $Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ est

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) .$$

Dans le cas particulier où l'on considère un corps de nombres E sur $\mathbf{Q}$, muni d'une base fondamentale $(\omega_1, ..., \omega_n)$, on déduit de la proposition 3 du chapitre II et de la remarque qui suit qu'il y a un isomorphisme ν de $T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$, sur $E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_{\mathfrak{p}}^\times)$, où $r_{\mathfrak{p}}$ désigne le sous-anneau compact maximal de $E_{\mathfrak{p}}$. Ainsi $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ s'identifie à l'ensemble $\mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_{\mathfrak{p}}^\times)$ qui se projette dans le groupe des classes d'idéaux de E

$$E_\infty^\times\, E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_{\mathfrak{p}}^\times) ,$$

où on a noté E_∞ le produit des complétés aux places infinies $\prod_{v\in P_\infty} E_v$. Soient h le nombre de classes de E et $(a_j)_{j=l \text{ à } h}$, un système de représentants de ces classes dans $\mathbf{A}_E^\times$, on a une bijection

$$\mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_{\mathfrak{p}}^\times) \to \bigcup_{j=l \text{ à } h} a_j \cdot (\mathbf{R}^\times\backslash E_\infty^\times) .$$

En combinant cette bijection avec l'isomorphisme

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_{\mathfrak{p}}^\times) ,$$

on peut écrire

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) = \bigcup_{j=l \text{ à } h} H_j \cdot \left(Z_\infty T(\mathbf{Z})\backslash T_\infty(\mathbf{A})\right) ,$$

où la réunion est disjointe et où la classe de la matrice $H_j \in T(\mathbf{A})$ dans $T_\infty(\mathbf{A}) \cdot T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ correspond à la classe de l'élément a_j de $\mathbf{A}_E^\times$ dans $E_\infty^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_{\mathfrak{p}}^\times)$. On choisit de plus H_j telle que

$$(H_j)_\infty = 1 .$$

On cherche à présent l'image du quotient $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ dans $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$. Si on note h_j l'image de la matrice H_j dans $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$ alors l'image de $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ est $\bigcup_{j=l \text{ à } h} h_j(Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R}))$.

Reste à déterminer un système de matrices h_j. Pour chaque élément a_j de $\mathbf{A}_E^\times$ dans le système de représentants des classes d'idèles, on note $a_j = [\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}]$ un idéal de E dont la classe correspond par I_E (voir la proposition du chapitre II) à la classe a_j.

Définition 1. On note P_j l'élément de $G(\mathbf{Q})$, matrice de passage de la base fondamentale $(\omega_1, ..., \omega_n)$ de E à la base $[\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}]$ de l'idéal a_j, dont la i^e ligne est constituée des coordonnées du vecteur α_{ij} dans la base $(\omega_1, ..., \omega_n)$.

D'autre part, on a le diagramme d'isomorphismes commutatif suivant déduit de la proposition 4 du chapitre II

$$\begin{array}{ccccc}
E_\infty^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_p^\times) & \xrightarrow[\nu^{-1}]{} & T_\infty(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) & \subset & G_\infty(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}}) \\
I_E \downarrow\wr & & I_T \downarrow\wr & & I_T \downarrow\wr \\
\textit{Idéaux de } E & \xrightarrow[\Omega^{-1}]{\sim} & \Omega^{-1}\,(\textit{Idéaux de } E) & \subset & \textit{Réseaux de } \mathbf{Q}^n
\end{array}$$

Le réseau image par I_T de la matrice $(1, P_j, ..., P_j, ...)$ de $G(\mathbf{A})$ est le réseau associé à l'idéal a_j par l'application Ω^{-1}. En effet, quelque soit la place v finie, les vecteurs qui engendrent le réseau $(r_v^n \cdot P_j)$ ont pour coordonnées dans la base canonique les coordonnées de $\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}$ dans la base $(\omega_1, ..., \omega_n)$.
On en déduit que

$$H_j = (1, \prod_p (H_j)_p) \equiv (1, P_j, ..., P_j, ...) \bmod G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et par suite la matrice h_j est l'image de $(1, P_j, ..., P_j, ...)$ dans $Z_\infty G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$, c'est-à-dire P_j^{-1}. Par suite:

PROPOSITION 11. *L'image du tore* $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ *dans*

$$Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$$

est la réunion $\bigcup_{j=1}^{h} P_j^{-1} \cdot (Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R}))$.