Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SÉRIES D'EISENSTEIN, INTÉGRALES TOROÏDALES ET UNE FORMULE DE HECKE

Autor: Wielonsky, Franck

Kapitel: 1. La projection de G(Q)Z(A)\G(A) sur la place à l'infini

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54560

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Chapitre VI

La formule intégrale de Hecke

Le but de ce chapitre est d'utiliser la formule établie dans le théorème 1, dans le cas particulier où k est le corps $\mathbf{Q}$ et E un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$, afin d'obtenir la formule intégrale de Hecke classique (Réf. [H]). Dans un premier paragraphe on construira une application de l'ensemble des matrices $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ dans l'ensemble $G(\mathbf{Z}) \cdot Z_\infty \backslash G(\mathbf{R})$ des matrices réelles et on calculera l'image par cette application du tore $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$. Dans le deuxième paragraphe, on utilisera cette application pour retrouver la formule de Hecke à partir de l'identité du chapitre précédent (Théorème 1).

1. La projection de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ sur la place à l'infini

A. *La projection* $\pi_1 : G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A}) \to Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$

L'ensemble Z_∞ désigne le sous-groupe de $G(\mathbf{A})$ constitué des matrices z telles que z_∞ soit une matrice scalaire non nulle et z_p est la matrice identité pour tout nombre p premier.

Soient $M \in G(\mathbf{A})$ et $z \in (\mathbf{A})$ avec

$$Z = \begin{pmatrix} z_p & & \\ & \ddots & \\ & & z_p \end{pmatrix}$$

où pour p fini, on exige que $z_p \in \mathbf{Z}_p^\times$ pour presque tout p et $z_p \in \mathbf{Q}_p^\times$ pour tout p.

Soit S l'ensemble des nombres premiers p tels que $z_p \notin \mathbf{Z}_p^\times$ et soit p un élément de S, il existe un entier n_p vérifiant

$$p^{n_p} \cdot z_p \in \mathbf{Z}_p^\times .$$

Soit Q la matrice scalaire de $Z(\mathbf{Q})$ dont les éléments diagonaux valent $\prod_{p \in S} p^{n_p}$; ZQ est une matrice de $Z_\infty \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$.

Soit $(ZQ)_f$ la matrice adélique coïncidant avec ZQ aux places finies et égale à 1 à la place infinie, et $(ZQ)_\infty$ la matrice adélique égale à $Z_\infty Q$ à la place infinie et égale à 1 aux places finies; on a la décomposition suivante:

$$\begin{aligned} ZM &= ZQ \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty \cdot (ZQ)_f \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty \, Q^{-1}M(ZQ)_f \,. \end{aligned}$$

Ce qui précède montre que la projection π_1 qui a un élément de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ fait correspondre la classe dans $Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ d'un représentant quelconque de cet élément, est bien définie.

B. *Il y a une bijection* π_2 *entre* $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ *et* $G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$

En effet, on considère l'application de $G(\mathbf{R})$ dans $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ qui a une matrice g de $G(\mathbf{R})$ associe la classe de $(g, 1, ..., 1, ...)$ dans $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$. Cette application est surjective puisqu'on a la décomposition bien connue de $G(\mathbf{A})$:

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q}) \cdot G^+(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$$

(voir par exemple [5], pp. 143-146 pour le cas $n = 2$ et la démonstration est la même pour n quelconque).

Supposons que les matrices g et g' aient la même image. Alors on a une égalité

$$\gamma g k = \gamma' g' k' \,,$$

avec $\gamma, \gamma' \in G(\mathbf{Q})$ et $k, k' \in G(\hat{\mathbf{Z}})$; par suite

$$\gamma^{-1}\gamma' = g\, k\, k'^{-1} g'^{-1} = g\, g'^{-1} k\, k'^{-1} \,.$$

Mais l'intersection $G(\mathbf{Q}) \cap G(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$ est réduite à $G(\mathbf{Z})$; cela entraîne l'existence d'un élément σ de $G(\mathbf{Z})$ tel que

$$\gamma' = \gamma\sigma \,, \qquad g = \sigma g' \,, \qquad k = \sigma k' \,.$$

Ainsi g et g' ont la même image si et seulement si ces matrices sont congrues modulo $G(\mathbf{Z})$. On a démontré:

PROPOSITION 10. *L'application* $\pi_2 \circ \pi_1$ *où*

$$\pi_1 : G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A}) \to Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et

$$\pi_2 : Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}}) \to Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$$

sont définies comme précédemment, n'est autre que la projection canonique de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ *sur* $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$.

C. *L'image du tore* $T(\mathbf{A})$ *dans* $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$

L'image de $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$ dans $Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ est

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) .$$

Dans le cas particulier où l'on considère un corps de nombres E sur $\mathbf{Q}$, muni d'une base fondamentale $(\omega_1, ..., \omega_n)$, on déduit de la proposition 3 du chapitre II et de la remarque qui suit qu'il y a un isomorphisme ν de $T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$, sur $E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$, où $r_\mathfrak{p}$ désigne le sous-anneau compact maximal de $E_\mathfrak{p}$. Ainsi $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ s'identifie à l'ensemble $\mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$ qui se projette dans le groupe des classes d'idéaux de E

$$E_\infty^\times E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) ,$$

où on a noté E_∞ le produit des complétés aux places infinies $\prod_{v\in P_\infty} E_v$. Soient h le nombre de classes de E et $(a_j)_{j=1 \text{ à } h}$, un système de représentants de ces classes dans $\mathbf{A}_E^\times$, on a une bijection

$$\mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) \to \bigcup_{j=1 \text{ à } h} a_j \cdot (\mathbf{R}^\times\backslash E_\infty^\times) .$$

En combinant cette bijection avec l'isomorphisme

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) ,$$

on peut écrire

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) = \bigcup_{j=1 \text{ à } h} H_j \cdot (Z_\infty T(\mathbf{Z})\backslash T_\infty(\mathbf{A})) ,$$

où la réunion est disjointe et où la classe de la matrice $H_j \in T(\mathbf{A})$ dans $T_x(\mathbf{A}) \cdot T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ correspond à la classe de l'élément a_j de $\mathbf{A}_E^\times$ dans $E_\infty^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$. On choisit de plus H_j telle que

$$(H_j)_\infty = 1 .$$

On cherche à présent l'image du quotient $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ dans $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$. Si on note h_j l'image de la matrice H_j dans $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$ alors l'image de $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ est $\bigcup_{j=1 \text{ à } h} h_j(Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R}))$.

Reste à déterminer un système de matrices h_j. Pour chaque élément a_j de $\mathbf{A}_E^\times$ dans le système de représentants des classes d'idèles, on note $a_j = [\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}]$ un idéal de E dont la classe correspond par I_E (voir la proposition du chapitre II) à la classe a_j.

Définition 1. On note P_j l'élément de $G(\mathbf{Q})$, matrice de passage de la base fondamentale $(\omega_1, ..., \omega_n)$ de E à la base $[\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}]$ de l'idéal a_j, dont la i^e ligne est constituée des coordonnées du vecteur α_{ij} dans la base $(\omega_1, ..., \omega_n)$.

D'autre part, on a le diagramme d'isomorphismes commutatif suivant déduit de la proposition 4 du chapitre II

$$\begin{array}{ccccc}
E_\infty^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times / (\prod r_{\mathfrak{p}}^\times & \underset{\nu^{-1}}{\rightarrow} & T_\infty(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}}) & \subset & G_\infty(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A}) / G(\hat{\mathbf{Z}}) \\
I_E \downarrow \wr & & I_T \downarrow \wr & & I_T \downarrow \wr \\
\textit{Idéaux de } E & \underset{\Omega^{-1}}{\tilde{\rightarrow}} & \Omega^{-1} (\textit{Idéaux de } E) & \subset & \textit{Réseaux de } \mathbf{Q}^n
\end{array}$$

Le réseau image par I_T de la matrice $(1, P_j, ..., P_j, ...)$ de $G(\mathbf{A})$ est le réseau associé à l'idéal a_j par l'application Ω^{-1}. En effet, quelque soit la place v finie, les vecteurs qui engendrent le réseau $(r_v^n \cdot P_j)$ ont pour coordonnées dans la base canonique les coordonnées de $\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}$ dans la base $(\omega_1, ..., \omega_n)$.

On en déduit que

$$H_j = (1, \prod_p (H_j)_p) \equiv (1, P_j, ..., P_j, ...) \bmod G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et par suite la matrice h_j est l'image de $(1, P_j, ..., P_j, ...)$ dans $Z_\infty G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$, c'est-à-dire P_j^{-1}. Par suite:

PROPOSITION 11. *L'image du tore* $Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})$ *dans*

$$Z(\mathbf{R}) G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$$

est la réunion $\bigcup_{j=1}^{h} P_j^{-1} \cdot (Z(\mathbf{R}) T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R}))$.