

§2. Preliminaries

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

A NOTE ON LEVI'S PROBLEM WITH DISCONTINUOUS FUNCTIONS

by Mihnea COLTOIU

§ 1. INTRODUCTION

In [3] Fornaess and Narasimhan proved that a complex space X which carries a strongly plurisubharmonic exhaustion function $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ is a Stein space. It is a remarkable fact that φ is supposed only upper semicontinuous.

A natural question which arises when we consider the Levi problem with upper semicontinuous functions is the following: what would happen if we allowed φ to take on the value $-\infty$. Simple examples (compact complex spaces, the blowing up of $\mathbf{C}^n$ at the origine...) show us that X is not necessarily Stein. The best result one might hope to obtain is X being 1-convex.

The aim of this short note is to give an affirmative answer to this question, hence to prove the following theorem conjectured by Fornaess and Narasimhan:

THEOREM 1. *Let X be a complex space which admits a strongly plurisubharmonic exhaustion function $\varphi: X \rightarrow [-\infty, \infty)$. Then X is 1-convex.*

If φ is supposed real-valued it follows easily, from the maximum principle, that the exceptional set of X is empty, hence X is Stein. This is exactly Fornaess-Narasimhan's theorem.

§ 2. PRELIMINARIES

All complex spaces are assumed to be reduced and countable at infinity.

An upper semicontinuous function $\varphi: X \rightarrow [-\infty, \infty)$ is called plurisubharmonic if for every holomorphic map $\tau: W \rightarrow X$ (W = the unit disc in $\mathbf{C}$) it follows that $\varphi \circ \tau$ is subharmonic on W (possibly $\equiv -\infty$). φ is said

to be strongly plurisubharmonic if for every C^∞ real-valued function θ with compact support there exists an $\varepsilon_0 > 0$ such that $\varphi + \varepsilon\theta$ is plurisubharmonic for $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$.

A main result in [3] tells us that the above definition agrees with the usual one as given in [6].

Let us also recall that a complex space X is said to be 1-convex if there exist:

- i) a compact analytic set $S \subset X$ with $\dim_x S > 0$ for any $x \in S$,
- ii) a Stein space Y , a finite set $A \subset Y$ and a proper holomorphic map $p: X \rightarrow Y$ inducing a biholomorphism $X \setminus S \cong Y \setminus A$ and which satisfies $p_* \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$.

S is called the exceptional set of X and Y the Remmert reduction of X .

Remark. Using the analytic version of Chow's lemma (Hironaka [5]) it was proved in [2] that any 1-convex space X carries a strongly plurisubharmonic exhaustion function $\varphi: X \rightarrow [-\infty, \infty)$, i.e. the converse of Theorem 1 holds too.

§ 3. THE PROOF OF THEOREM

We shall apply Andreotti-Grauert's technique [1] with suitable modifications required by the upper semicontinuity. Throughout this section $\mathcal{F}$ will denote a coherent sheaf on X and $X_c = \{x \in X \mid \varphi(x) < c\}$.

To prove Theorem 1 we need some lemmas.

LEMMA 1. *For any $c \in \mathbf{R}$ there exists $\varepsilon > 0$ such that the restriction map $H^1(X_{c+\varepsilon}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X_{c+\varepsilon'}, \mathcal{F})$ is surjective for any $0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$.*

Proof. We may assume $c = 0$. Set $K = \overline{\{\varphi < 1\}}$ and let $\{U_1, \dots, U_m\}$ be a covering of K with Stein open sets, $U_i \subset \subset X$ and $h_i \in C_0^\infty(U_i)$, $h_i \geq 0$ such that $\varphi - \sum_{i=1}^r h_i$ is strongly plurisubharmonic for $r = 1, \dots, m$ and $\sum_{i=1}^m h_i > 0$ on K . Choose $\alpha > 0$ such that $\sum_{i=1}^m h_i(x) \geq \alpha$ for any $x \in K$ and take $0 < \varepsilon < \min(\alpha, 1)$. We shall prove that this ε satisfies the conditions required in Lemma 1.

For any $0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$ we set $X_{\varepsilon'}^r = \{x \in X \mid \varphi(x) < \varepsilon' + h_1(x) + \dots + h_r(x)\}$ for $r = 0, \dots, m$ (by definition $X_{\varepsilon'}^0 = X_{\varepsilon'}$).