§3. Nombre gordien des entrelacs

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Remarque. Les entrelacs $\Gamma(r, d)$ sont bien faciles à dessiner. Plaçons nous dans le groupe des tresses à r brins B_r, et considérons l'élément

$$\alpha = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_{r-1},$$

puis l'élément $\beta = \alpha^r$. Sans les orientations, l'entrelacs de Hopf généralisé Γ correspond à la tresse fermée $\hat{\beta}$. Pour $r = 1$ on a un cercle non noué et pour $r = 2$ on a l'entrelacs de Hopf usuel. (Voir la figure 1 dans le cas $r = 4$.)

Avec une description aussi explicite, il est frappant que $m(\Gamma(r, d))$ ne soit pas connu. Le § 6 fait le point sur ce que l'on sait actuellement.

§ 3. Nombre gordien des entrelacs

Dans ce paragraphe, nous abandonnons la géométrie algébrique plane, pour nous intéresser à un vieil invariant de la théorie des nœuds, aussi appelé « Uberschneidungszahl » ou « unknotting number ». Commençons par la définition originale, légèrement mise au goût du jour.

Soit S_r l'union disjointe de r cercles: $S_r = \coprod_{i=1}^{r} S_i^1$. *Une immersion*

$$\varphi : S_r \looparrowright \mathbf{R}^2$$

sera dite générique, si ses seules singularités sont des points doubles où les deux brins se coupent transversalement.

Une immersion générique sera dite signée si, en chaque point double, on a choisi un brin positif et un brin négatif. Expliquons-nous: traditionnellement le brin positif est dessiné par un trait plein et le brin négatif est dessiné par un trait brisé.

Soit K un entrelacs dans $\mathbf{R}^3$. Soit $\mathbf{R}^2$ un plan dans $\mathbf{R}^3$ et choisissons une orientation de la normale au plan. La projection orthogonale $\pi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ est une bonne projection pour K, si $\pi \mid K$ est une immersion générique. Une telle immersion est signée de façon naturelle, le brin positif en un point double étant celui qui se trouve le plus haut. Ceci a un sens puisque nous avons choisi une orientation de la normale au plan.

Réciproquement, une immersion signée détermine un entrelacs dans $\mathbf{R}^3$, dont la classe d'équivalence est bien définie. Nous dirons que cet entrelacs se trouve au-dessus de l'immersion signée.

Lemme. *Soit* $\varphi : S_r \looparrowright \mathbf{R}^2$ *une immersion générique. Alors, il existe un choix des signes aux points doubles tel que l'entrelacs qui se trouve au-dessus de*

l'immersion signée correspondante soit trivial, c'est-à-dire constitué de r cercles situés dans r plans parallèles.

Preuve du lemme.

a) Décidons que la composante de l'entrelacs qui se trouvera au dessus de $\varphi(S_1^1)$ sera au dessus de toutes les autres composantes. Pour cela, chaque fois qu'un point double de φ fait intervenir un brin de S_1^1 et un brin de S_j^1, pour $j \neq 1$, donnons le signe $+$ au brin de S_1^1.

b) Rendons la composante de l'entrelacs qui se trouve au dessus de $\varphi(S_1^1)$ non nouée.

Pour cela, choisissons un point-base $*$ sur S_1^1, dont l'image par φ n'est pas un point double. Orientons S_1^1, et parcourons S_1^1 à partir de $*$, dans le sens donné par l'orientation.

Soit $P_1 \in S_1^1$, le premier point double de $\varphi \mid S_1^1$ que nous rencontrons. Il existe donc $P_1' \in S_1^1$, $P_1' \neq P_1$, tel que $\varphi(P_1) = \varphi(P_1')$. Attribuons à P_1 le signe $+$ et à P_1' le signe $-$. Nous procédons de même avec le prochain point double de $\varphi \mid S_1^1$, sans signe, que nous rencontrons: nous lui attribuons le signe $+$ et le signe $-$ va à son jumeau, et ainsi de suite.

Le nœud qui va se trouver au dessus de $\varphi(S_1^1)$ est trivial! La raison est que la restriction de la projection π à ce nœud possède un seul minimum, au point qui se trouve au dessus de $\varphi(*)$. (Un nœud à 1 pont est trivial.)

Traditionnellement le nœud que nous venons de construire s'appelle le nœud descendant au-dessus de $\varphi(S_1^1)$.

c) Nous décidons que la composante qui se trouvera au-dessus de $\varphi(S_2^1)$ sera dans $\mathbf{R}^3$, au-dessus de celles correspondant à $\varphi(S_j^1)$, $j \geqslant 3$. Nous procédons de façon analogue au point a).

d) Nous rendons triviale la composante qui se trouve au-dessus de $\varphi(S_2^1)$. Nous procédons comme au point b).

e) Nous continuons de façon analogue avec chaque composante, l'une après l'autre, de l'entrelacs.

Soient, à nouveau, K un entrelacs dans $\mathbf{R}^3$ et π une bonne projection de K. Le lemme précédent montre qu'en faisant un nombre fini de changements de signes aux points doubles, on peut transformer K en l'entrelacs trivial. Par définition, le nombre gordien de la projection π est le minimum des changements de signes nécessaires pour « trivialiser » K.

Définition 1. Le nombre gordien $u(K)$ de K est le minimum des nombres gordiens de toutes les bonnes projections de K.

Note. Pour faire bonne mesure, précisons que nous laissons K varier dans sa classe d'équivalence. Ainsi, il est clair que le nombre gordien est un invariant de la classe d'équivalence de K. Il est clair aussi que nous n'avons pas du tout besoin d'orienter K, de sorte qu'il s'agit de la classe d'équivalence non orientée.

Remarque. Dans la démonstration du lemme que nous avons donnée, rien ne nous obligeait à décider arbitrairement que la première composante devait se trouver au-dessus des autres. De même, nous aurions pu choisir le nœud montant plutôt que le nœud descendant. En procédant alors de façon plus économique, on montre facilement que, si la bonne projection π possède l points doubles, le nombre gordien de π est plus petit ou égal à $l/2$.

Si $r = 1$, on peut obtenir un petit peu mieux.

Cette remarque indique de façon (un peu vague) que dans la détermination du nombre gordien, la principale difficulté consiste à trouver des minorations de $u(K)$.

Note historique. Sans doute, le nombre gordien a fait partie pendant longtemps des invariants numériques un peu folkloriques de la théorie des nœuds. Voir, par exemple, ce qu'en dit K. Reidemeister dans son livre [Re], page 16-17. La première contribution non banale au sujet fut celle de H. Wendt [We] qui donna une minoration du gordien dont nous parlerons plus tard au § 5.

Pour pouvoir étudier convenablement les relations du nombre gordien avec d'autres invariants de la théorie des entrelacs, nous donnons maintenant d'autres définitions du gordien.

Vers la définition 2.

Soit B^3 la boule standard de dimension 3. Soient V le diamètre de B^3 passant par les pôles, E l'équateur de B^3 que l'on découpe en deux arcs de grand cercle. Poussons un peu ces arcs dans B^3, de façon à ce qu'on obtienne deux arcs L et P plongés proprement et d'extrémités communes A et B. Soit H le diamètre passant par A et B (V = Vertical, H = Horizontal, L = Lointain, P = Proche ; voir figure 2).

Soit K un entrelacs dans S^3. Soit $\psi : B^3 \to S^3$ un plongement différentiable ou P.L., tel que : $\psi^{-1}(K) = V \cup L$. Par définition, l'échange élémentaire associé à ψ consiste à remplacer l'arc $\psi(L)$ de K par l'arc $\psi(P)$.

Si $\psi_1, ..., \psi_v$ sont v plongements, disjoints deux à deux, de B^3, on peut effectuer v échanges élémentaires simultanés.

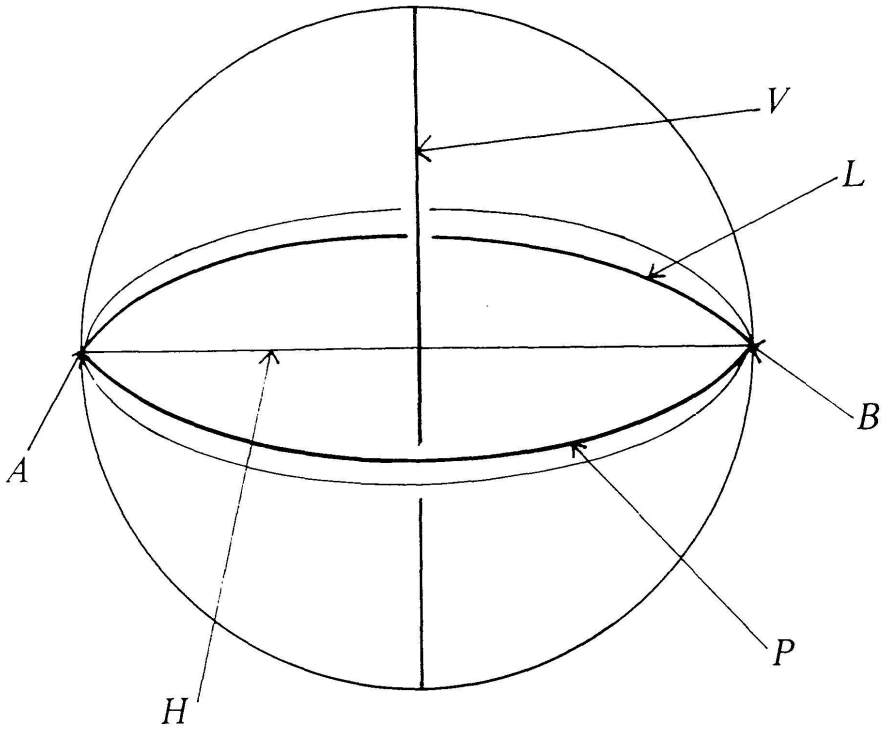

FIGURE 2

La démonstration du lemme montre, qu'étant donné un entrelacs K dans S^3, il existe un certain nombre d'échanges élémentaires simultanés qui permettent de transformer K en l'entrelacs trivial.

Définition 2. Le nombre gordien de K est le nombre minimum d'échanges élémentaires simultanés nécessaires pour rendre K trivial.

Manifestement, il n'est pas indispensable cette fois de faire varier K dans sa classe d'équivalence.

Vers la définition 3.

Soient φ_0 et φ_1 deux plongements différentiables de $S_r = \coprod_{i=1}^{r} S_i^1$ dans S^3.

Une homotopie régulière générique reliant φ_0 à φ_1 est une application différentiable $\Phi : S_r \times [0, 1] \to S^3$ telle que, si $\Phi_t(x) = \Phi(x, t)$, alors :

1. $\Phi_0 = \varphi_0$ et $\Phi_1 = \varphi_1$
2. Pour presque tout $t \in [0, 1]$ (c'est-à-dire pour tout $t \in [0, 1]$, sauf un nombre fini de valeurs), Φ_t est un plongement.
3. Si Φ_t n'est pas un plongement, alors Φ_t est une immersion ayant pour seules singularités des points doubles à tangentes distinctes.

Soit maintenant K un entrelacs dans S^3. Choisissons une paramétrisation de K, c'est-à-dire un plongement $\varphi : S_r \to S^3$ dont l'image est K. (Ce que nous allons faire est indépendant du choix de la paramétrisation.)

Un dénouement de K est une homotopie régulière générique Φ reliant φ au plongement trivial (paramétrant l'entrelacs trivial). Il existe toujours un dénouement de K : encore une fois c'est une conséquence du lemme. Le nombre gordien du dénouement Φ est la somme du nombre des points doubles des Φ_t, pour tout $t \in [0, 1]$.

Définition 3. Le nombre gordien de K est le minimum des nombres gordiens de tous les dénouements de K.

Remarque. Nous avons supposé l'application Φ différentiable. Ceci implique que, si le nombre gordien de Φ est nul, les entrelacs paramétrés par Φ_0 et Φ_1 sont équivalents. Ceci est une conséquence du théorème d'extension des isotopies de R. Thom.

Attention en général en théorie des entrelacs le terme d'isotopie désigne une notion plus faible (voir par exemple D. Rolfsen [Ro_3], J. Hillman [Hi]).

Vers la définition 4.

Posons $D_r = \bigsqcup_{i=1}^{r} D_i^2$; on a $\partial D_r = S_r$.

Soit $\varphi : S_r \hookrightarrow S^3$ un plongement différentiable. Considérons les immersions $G : D_r \looparrowright S^3 \times \mathbf{R}_+$, où $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$, telles que :

1. $G^{-1}(S^3 \times \{0\}) = S_r$
2. $G \mid S_r = \varphi$
3. $p \circ G : D_r \to \mathbf{R}_+$ est une fonction de Morse avec r maxima pour seuls points critiques. L'application $p : S^3 \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ désigne la projection canonique.
4. les seules singularités de l'immersion G sont des points doubles génériques, en nombre fini.

Une paramétrisation φ de l'entrelacs K étant donnée, il est facile de vérifier (cf. [BW]) qu'une telle immersion G existe toujours. Le nombre gordien de G est alors le nombre de points doubles de G.

Définition 4. Le nombre gordien de l'entrelacs K est le minimum des nombres gordiens de toutes les immersions G possibles.

THÉORÈME. *Les quatre définitions données sont équivalentes.*

Pour une démonstration, voir [BW].