Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

GROUPE DE BRAUER
DES CORPS DE FRACTIONS RATIONNELLES
À COEFFICIENTS COMPLEXES

par Philippe A. J. STEINER

INTRODUCTION

Le but de cet article est de calculer le groupe de Brauer des corps de fractions rationnelles à coefficients complexes $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)$. Dès que n est supérieur ou égal à 2, ce groupe est non nul et il se décompose en une somme directe non dénombrable de groupes $\chi(K)$ associés à des corps de fonctions complexes K . Plus précisément, on a une formule de récurrence

$$\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)) \simeq \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n-1})) \oplus \{ \oplus_f \chi(K_f) \},$$

où f parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n-1})$ et où K_f est l'extension de $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n-1})$ obtenue en adjoignant une racine de f .

Chaque groupe $\chi(K)$ est calculé à l'aide d'un modèle géométrique de K , c'est-à-dire à l'aide d'une variété algébrique lisse X ayant K pour corps des fonctions. On obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \chi(K) \rightarrow \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

qui exprime $\chi(K)$ en terme du groupe $\mathrm{Div}(X)$ des diviseurs de X et de la cohomologie $H^i(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ de X muni de la topologie transcendante et où l'homomorphisme c est induit par la première classe de Chern.

On montrera ensuite comment (une fois un modèle X de K fixé) on peut construire des algèbres simples centrales sur $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)$ à partir d'éléments de $\mathrm{Div}(X)$ et de $H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, puis qu'il existe un modèle X pour lequel $H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est divisible. Soit X_f un tel modèle de K_f et notons $\mathrm{Div}_0(X_f)$ son groupe des diviseurs dont la première classe de Chern est nulle. On obtient une formule

$$\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)) \simeq \oplus_f \{ H^1(X_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus \mathrm{Div}_0(X_f) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \},$$

où f parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_i)$ pour $1 \leq i < n$. On établit enfin que $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ est divisible et que, pour $n \geq 2$, sa classe d'isomorphie est indépendante de n .

Les deux premiers paragraphes sont consacrés aux rappels du théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev (qui fournit la décomposition de $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ en somme directe) et de la normalisation en géométrie algébrique. Dans les paragraphes 3 et 4, on dérive la suite exacte qui détermine le groupe $\chi(K)$. On en tire au paragraphe 5 un procédé pour construire « explicitement » des algèbres simples, puis on termine en établissant au paragraphe 6 la formule finale pour $\text{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ et en montrant que ce groupe est divisible.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à accomplir ce travail, notamment M. Kervaire qui m'en a suggéré le thème.

§ 1. THÉORÈME D'AUSLANDER-BRUMER-FADDEEV

Ce théorème calcule la structure du groupe de Brauer d'un corps de fractions rationnelles à une variable sur un corps quelconque. En se restreignant à la caractéristique zéro pour simplifier, on va rappeler (d'après [7]) comment il découle d'un résultat classique de Tsen.

Si K est un corps, on notera $K^\cdot$ son groupe multiplicatif, $\mathcal{P}(K)$ l'ensemble des polynômes en T unitaires irréductibles à coefficients dans K et si $f \in \mathcal{P}(K)$, K_f sera l'extension $K[T]/(f(T))$ de K . Si $\bar{K}$ est une clôture algébrique de K , on considérera le groupe $\chi_{\bar{K}}(K)$ des homomorphismes $\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ d'ordre fini (le groupe des homomorphismes continus pour les topologies discrète de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et naturelle de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$). Comme $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est abélien, si $\tilde{K}$ est une autre clôture algébrique de K , $\chi_{\tilde{K}}(K)$ est canoniquement isomorphe à $\chi_{\bar{K}}(K)$ et sera noté simplement $\chi(K)$.

THÉORÈME 1.1 (Auslander-Brumer [1], Faddeev [6]). *Soit K un corps de caractéristique zéro. On a un isomorphisme naturel*

$$\text{Br}(K(t)) = \text{Br}(K) \oplus \left\{ \bigoplus_{f \in \mathcal{P}(K)} \chi(K_f) \right\}.$$

Démonstration. Tout repose sur l'interprétation du groupe de Brauer comme groupe de cohomologie galoisienne. Pour cette interprétation, ainsi que pour la notion de produit croisé, on pourra se reporter à [14].

1) *Construction de l'isomorphisme:* Fixons une clôture algébrique $\bar{K}$ de K . Par le théorème de Tsen [14, Chap. 19, § 4], $\text{Br}(\bar{K}(t)) = 0$ et donc