

3. L'ÉQUATION FONCTIONNELLE

$$\varphi(t)^2 = \varphi(t+u)\varphi(t-u)\theta(u).$$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Soit X un vecteur aléatoire, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ (avec $n > 1$), dont les composantes sont indépendantes et de même loi μ . Considérons le transformé Y de X par une rotation autour de l'origine, dont on désignera par $A = (a_{ij})$ la matrice. Supposons que cette rotation ne soit pas du type (a) ci-dessus, c'est-à-dire qu'il existe un indice i tel que chacun des éléments $a_{i1}, \dots, a_{in}$ de la i -ème ligne de A soit différent de 1 et de -1 . Si, pour un tel indice i , la i -ème composante de Y , c'est-à-dire la variable aléatoire

$$Y_i = a_{i1}X_1 + \dots + a_{in}X_n,$$

suit la loi μ , peut-on affirmer que μ est normale et centrée?

En faisant intervenir la fonction caractéristique φ de la loi μ , le problème peut être reformulé ainsi:

Soit $(a_1, \dots, a_n)$ un système de n nombres réels satisfaisant aux conditions

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1, \quad |a_i| < 1 \text{ pour tout } i.$$

Si φ vérifie l'équation fonctionnelle

$$(2.1) \quad \varphi(t) = \varphi(a_1 t) \dots \varphi(a_n t),$$

peut-on affirmer que μ est normale et centrée?

La réponse est évidemment affirmative dans le cas particulier où les a_i sont égaux, car l'équation fonctionnelle (2.1) se réduit alors à l'équation fonctionnelle $\varphi(t) = (\varphi(t/\sqrt{n}))^n$ déjà étudiée au paragraphe précédent. Dans le cas général, la réponse est encore affirmative, mais elle exige une démonstration beaucoup plus délicate, fondée sur la théorie des lois limites de Kolmogorov: cf. [5], Théor. 7.2.1, pag. 161, où le problème est généralisé au cas d'une suite infinie de variables aléatoires (indépendantes et de même loi). ¹⁾

3. L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $(\varphi(t))^2 = \varphi(t+u) \varphi(t-u) \theta(u)$.

Le théorème qui suit est une conséquence immédiate de (1.2). Il nous servira à démontrer de façon très simple le théorème de Bernstein-Darmois.

(3.1) THÉORÈME. Soient μ une loi de probabilité sur $\mathbf{R}$, φ sa fonction caractéristique. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

¹⁾ A signaler que l'énoncé du théorème de [5] cité ci-dessus est incorrect: en effet, il est faux si l'on prend $a_1 = \alpha$ et $a_i = 0$ pour tout $i \geq 2$. Pour le rendre correct, il suffit d'ajouter l'hypothèse: $|a_i| < |\alpha|$ pour tout i .

(a) μ est normale ;

(b) il existe un voisinage V de l'origine dans $\mathbf{R}$ et une application θ de V dans $\mathbf{C}$ telle que l'on ait

$$(3.2) \quad (\varphi(t))^2 = \varphi(t+u) \varphi(t-u) \theta(u)$$

pour tout couple t, u d'éléments de V .

Démonstration. Il suffit de démontrer l'implication (b) $\Rightarrow$ (a). Supposons donc la propriété (b) vérifiée. Quitte à remplacer φ par $\varphi \bar{\varphi}$, on peut supposer φ réelle. L'équation (3.2) fournit alors, pour $t = 0$, $1 = (\varphi(u))^2 \theta(u)$, de sorte qu'elle peut s'écrire sous la forme équivalente

$$(\varphi(t) \varphi(u))^2 = \varphi(t+u) \varphi(t-u).$$

En particulier, pour $t = u = s/2$, on trouve $(\varphi(s/2))^4 = \varphi(s)$. La conclusion résulte alors du Théorème (1.2) pour $c = 4$.

(3.3) *Remarque.* Le cas d'une loi μ dégénérée correspond à celui où l'équation (3.2) est vérifiée avec une fonction θ identiquement égale à 1.

4. LE THÉORÈME DE BERNSTEIN-DARMOIS

Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires réelles, de même loi. Si le couple $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ est formé de variables aléatoires indépendantes, alors la loi commune de X_1 et de X_2 est normale: c'est le théorème de Bernstein-Darmois sous sa forme primitive. Il fut d'abord démontré par S. Bernstein [1] avec l'hypothèse que la loi commune de X_1 et de X_2 possède des moments finis jusqu'à l'ordre 4. Plus tard G. Darmois [2] réussit à généraliser ce résultat, tout en s'affranchissant de l'hypothèse concernant l'existence des moments. Il employa à cet effet une technique de différences finies, qui lui permit également de démontrer une généralisation ultérieure, bien plus profonde, connue sous le nom de théorème de Skitovitch-Darmois (cf. [6]).

Nous présentons ci-dessous le théorème de Bernstein-Darmois, que nous démontrons à l'aide de l'équation fonctionnelle du paragraphe 3.

(4.1) **THÉORÈME.** Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, dont les composantes X_1, X_2 sont des variables aléatoires indépendantes. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle $(2, 2)$, et supposons que les composantes du