

IV.2. Trois suites numériques définies par n et q

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

transformée stricte de l'axe d'équation $x = y = 0$ dans $\mathbf{C}^3$. Alors $D_f = 2A + E$, d'où par (jv) ci-dessus

$$\langle D_f | E \rangle = 2\langle A | E \rangle + \langle E | E \rangle = 0$$

et par (jjj) $\langle E | E \rangle = -2$.

Exemple 3. Soit $S_{(-k)}$ comme à la section I.3, avec deux cartes — disons deux copies R_0 et R_1 de $\mathbf{C}^2$ — recollées selon l'isomorphisme que nous écrirons ici

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(u, v) \in R_0 \mid u \neq 0\} \rightarrow \{(u, v) \in R_1 \mid v \neq 0\} \\ (u, v) \mapsto (u^k v, 1/u) \end{array} \right.$$

Considérons d'une part les fonctions $\xi_0, \eta_0, \zeta_0: R_0 \rightarrow \mathbf{C}$ définies par

$$\xi_0(u, v) = u^k v \quad \eta_0(u, v) = v \quad \zeta_0(u, v) = uv$$

et d'autre part les fonctions $\xi_1, \eta_1, \zeta_1: R_1 \rightarrow \mathbf{C}$ définies par

$$\xi_1(u, v) = u \quad \eta_1(u, v) = uv^k \quad \zeta_1(u, v) = uv^{k-1}.$$

On vérifie sans peine que ces données définissent trois fonctions globales $\xi, \eta, \zeta: S_{(-k)} \rightarrow \mathbf{C}$ satisfaisant l'égalité $\zeta^k = \xi\eta^{k-1}$, donc aussi une application $\rho: S_{(-k)} \rightarrow A_{k,1}$. Le lecteur s'assurera à titre d'exercice que ρ est une résolution de $A_{k,1}$, que la matrice d'intersection se réduit au nombre $-k$, et que ρ se relève en $\tilde{\rho}: S_{(-k)} \rightarrow X_{k,1}$. L'application $\tilde{\rho}$ résout donc la singularité définie par le groupe cyclique

$$\left\{ \begin{pmatrix} e(j/k) & 0 \\ 0 & e(j/k) \end{pmatrix} \in \text{Aut}(\mathbf{C}^2) \mid j = 0, \dots, k-1 \right\}.$$

Si $k = 2$, on retrouve l'exemple 1.

Citons enfin sans démonstration le théorème suivant: pour toute singularité isolée de dimension deux et pour toute désingularisation (minimale ou non), la matrice d'intersection associée est négative définie. Les exemples ci-dessus offrent une première illustration de ce résultat. Voir [16], § 1.

IV.2. TROIS SUITES NUMÉRIQUES DÉFINIES PAR n ET q

Le contenu des paragraphes 2 et 3 se trouve dans [9].

Soient n et q des entiers avec $0 < q < n$.

Posons $\lambda_0 = n$ et $\lambda_1 = q$. Définissons ensuite les entiers $\lambda_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ par l'algorithme euclidien suivant:

$$\lambda_2 = b_1 \lambda_1 - \lambda_0 \quad \text{avec} \quad b_1 \geq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \lambda_2 < \lambda_1$$

$$\lambda_3 = b_2 \lambda_2 - \lambda_1 \quad \text{avec} \quad b_2 \geq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \lambda_3 < \lambda_2$$

Soit s le plus grand entier pour lequel λ_s soit non nul, de sorte que

$$\lambda_s = b_{s-1} \lambda_{s-1} - \lambda_{s-2} \quad \text{avec} \quad b_{s-1} \geq 0 \quad \text{et} \quad 0 < \lambda_s < \lambda_{s-1}$$

$$0 = b_s \lambda_s - \lambda_{s-1}.$$

On vérifie sans peine que λ_s est le plus grand commun diviseur de n et q , ce qui s'écrit $\lambda_s = (n, q)$. On définit $\lambda_{s+1} = 0$. On peut remarquer que les équations ci-dessus s'écrivent aussi

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{\lambda_2}{q}, \quad \frac{q}{\lambda_2} = b_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \dots,$$

$$\frac{\lambda_{s-2}}{\lambda_{s-1}} = b_{s-1} - \frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}} = b_{s-1} - \frac{1}{b_s}.$$

D'où

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \frac{1}{b_4 - \dots - \frac{1}{b_s}}}}$$

ce que certains auteurs notent plus économiquement

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{1}{b_2} - \dots - \frac{1}{b_s}.$$

On définit ensuite les suites $(\mu_k)_{k=0, \dots, s+1}$ et $(v_k)_{k=0, \dots, s+1}$ par

$\mu_0 = 0$	$v_0 = 1$
$\mu_1 = 1$	$v_1 = 1$
$\mu_2 = b_1 \mu_1 - \mu_0$	$v_2 = b_1 v_1 - v_0$
.....	
$\mu_s = b_{s-1} \mu_{s-1} - \mu_{s-2}$	$v_s = b_{s-1} v_{s-1} - v_{s-2}$
$\mu_{s+1} = b_s \mu_s - \mu_{s-1}$	$v_{s+1} = b_s v_s - v_{s-1}$

Lemme. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, s\}$ on a :

$$(a) \quad \lambda_k + (n-q) \mu_k = n v_k$$

$$(b) \quad \lambda_k \mu_{k+1} - \lambda_{k+1} \mu_k = n$$

$$(c) \quad \mu_{k+1} v_k - \mu_k v_{k+1} = 1.$$

De plus

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_{s+1} = \frac{n}{(n, q)}$$

et

$$1 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{s+1} = \frac{n-q}{(n, q)}.$$

Preuve. Les relations (a), (b) et (c) sont banales si $k = 0$ et si $k = 1$. Pour $k \geq 2$, elles résultent des calculs élémentaires suivants :

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} + (n-q) \mu_{k+1} &= b_k \lambda_k - \lambda_{k-1} + (n-q) (b_k \mu_k - \mu_{k-1}) \\ &= b_k (\lambda_k + (n-q) \mu_k) - (\lambda_{k-1} + (n-q) \mu_{k-1}) = b_k n v_k - n v_{k-1} \\ &= n v_{k+1} \quad (k=1, \dots, s); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} \mu_{k+2} - \lambda_{k+2} \mu_{k+1} &= \lambda_{k+1} (b_{k+1} \mu_{k+1} - \mu_k) - (b_{k+1} \lambda_{k+1} - \lambda_k) \mu_{k+1} \\ &= \lambda_k \mu_{k+1} - \lambda_{k+1} \mu_k \quad (k=1, \dots, s-1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{k+2} v_{k+1} - \mu_{k+1} v_{k+2} &= (b_{k+1} \mu_{k+1} - \mu_k) v_{k+1} - \mu_{k+1} (b_{k+1} v_{k+1} - v_k) \\ &= \mu_{k+1} v_k - \mu_k v_{k+1} \quad (k=1, \dots, s-1). \end{aligned}$$

En particulier, comme $\lambda_{s+1} = 0$, on a $0 + (n-q) \mu_{s+1} = n v_{s+1}$ et $\lambda_s \mu_{s+1} = n$, d'où $\mu_{s+1} = \frac{n}{\lambda_s} = \frac{n}{(n, q)}$ et $v_{s+1} = \frac{n-q}{(n, q)}$. Enfin, comme $b_k \geq 2$ pour $k = 1, \dots, s$, on a

$$\mu_{k+1} - \mu_k = (b_k - 1) \mu_k - \mu_{k-1} \geq \mu_k - \mu_{k-1} \geq \dots \geq \mu_1 - \mu_0 > 0$$

et

$$v_{k+1} - v_k \geq \dots \geq v_1 - v_0 \geq 0.$$

ce qui achève la preuve. ■

Nous reviendrons à plusieurs reprises sur les exemples décrits dans le tableau suivant :

n	10	8	6	4
q	8	6	4	2
s	4	3	2	1
$(\lambda_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(10,8,6,4,2,0)	(8,6,4,2,0)	(6,4,2,0)	(4,2,0)
$(\mu_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(0,1,2,3,4,5)	(0,1,2,3,4)	(0,1,2,3)	(0,1,2)
$(v_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1)

IV.3. LES RÉSOLUTIONS $\rho: M_{n,q} \rightarrow A_{n,q}$ OU $\tilde{\rho}: M_{n,q} \rightarrow X_{n,q}$

Soient à nouveau n et q comme à la section 2, dont on reprend toutes les notations.

Pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, s\}$, désignons par R_k une copie de C^2 , par (u_k, v_k) ses coordonnées canoniques, et par R'_k [resp. R''_k] l'ouvert de ses points de première [resp. seconde] coordonnée non nulle. Pour $k \in \{1, \dots, s\}$, soit

$$\varphi_{k-1}: \begin{cases} R'_{k-1} & \rightarrow & R''_k \\ (u_{k-1}, v_{k-1}) & \mapsto & ((u_{k-1})^{b_k} v_{k-1}, (u_{k-1})^{-1}) \end{cases};$$

c'est un isomorphisme dont l'inverse applique (u_k, v_k) sur $(1/v_k, v_k^{b_k} u_k)$. Notons $R_{0,1}$ la variété obtenue en recollant R_0 et R_1 selon φ_0 , déjà considérée à l'exemple 3 de la section 1. Soient ensuite $R_{0,1,2}$ la variété obtenue en recollant $R_{0,1}$ et R_2 selon φ_1 , ..., et $R_{0,1,\dots,s} = M_{n,q}$ la variété obtenue en recollant $R_{0,1,\dots,s-1}$ et R_s selon φ_{s-1} . Nous identifierons chaque R_k à son image dans $M_{n,q}$. La variété $M_{n,q}$ est une *surface lisse* dans laquelle chaque R_k est un ouvert dense (de fait un ouvert de Zariski).

Pour chaque $k \in \{1, \dots, s\}$, considérons la *courbe*

$$\sigma_k = \{(u_{k-1}, v_{k-1}) \in R_{k-1} \mid v_{k-1} = 0\} \cup \{(u_k, v_k) \in R_k \mid u_k = 0\}$$

qui est lisse et isomorphe à P^1 . Notons encore σ_{in} et σ_{fi} les courbes lisses non compactes définies respectivement par $\{(u_0, v_0) \in R_0 \mid u_0 = 0\}$